

Strutture e Materiali Aerospaziali I

Prof. Giavotto e Anghileri

Introduzione

Nelle strutture aerodinamiche i materiali usati sono: leghe d'alluminio, leghe di titanio, acciaio, materiali compositi. Si sceglie un materiale piuttosto che un altro secondo l'uso e delle caratteristiche che la struttura deve avere. Ad esempio nelle zone più calde (motore) si usa l'acciaio, e non l'alluminio o il titanio, perché è quello che resiste meglio alle temperature più elevate (650°C).

I due rapporti fondamentali nella scelta del materiale sono $\frac{\sigma_R}{\gamma}$ e $\frac{E}{\gamma}$, per i diversi materiali che negli anni sono stati utilizzati per le strutture aeronautiche, questo rapporto ha praticamente lo stesso valore.

La velocità ha avuto notevoli incrementi nel tempo e ciò ha condizionato pesantemente la scelta dei materiali (per questo motivo il legno non viene più usato e non perché non fosse una scelta adeguata ed efficiente, era la scelta migliore per quelle velocità anche se si conoscevano altri materiali come l'acciaio e l'alluminio).

Un requisito fondamentale delle strutture aeronautiche è la leggerezza.

Il metodo degli elementi finiti è un metodo di calcolo molto complesso, dà risultati molto accurati ma richiede in ingresso un elevatissimo numero di dati quindi nelle prime fasi del progetto non possiamo utilizzarlo perché abbiamo una conoscenza molto approssimata della struttura, possiamo usare invece lo schema a semiguscio per il progetto iniziale.

Nel progetto bisogna tenere conto dei problemi di aeroelasticità e d'instabilità. I problemi aeroelastici nascono dall'interazione tra effetti aerodinamici ed effetti elastici.

L'instabilità può essere:

- a) statica (la torsione fa variare incidenza e portanza);
- b) dinamica (oscillazioni non smorzate).

Le strutture aeronautiche hanno delle caratteristiche particolari:

- lo spessore è distribuito lungo i contorni della sezione per bilanciare meglio i momenti torcenti;
- la presenza dei diaframmi impedisce alla sezione di deformarsi sotto l'azione di trazione o compressione.

I materiali compositi sono costituiti da fibre di carbonio legate con dei particolari collanti. Le ottime caratteristiche delle fibre di carbonio vengono alterate proprio dalla presenza di queste colle che però sono indispensabili per ottenere il composito.

Tensore di deformazione

Da campo di spostamento di un corpo si può risalire al tensore di deformazione,

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (s_{i/k} + s_{k/i} + s_{r/i} \cdot s_{r/k})$$

nel caso di spostamenti infinitesimi, il tensore di deformazione si semplifica nella maniera seguente:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (s_{i/k} + s_{k/i})$$

Lavoro di deformazione

Il lavoro di deformazione è data dalla seguente formula,

$$\delta^* L_d = \int_V \sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik} dV = \int_V \{\sigma\}^T \{\delta \varepsilon\} dV = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV$$

Tensore degli sforzi

A questo punto, dalla definizione di lavoro di deformazione scaturisce immediatamente il concetto di tensore degli sforzi. Tale tensore è, infatti, il coniugato del tensore di deformazione, nel senso che il prodotto delle due grandezze ε e σ deve dare il lavoro. Data la simmetria del tensore degli sforzi è possibile tradurre il tensore in vettore:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{matrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{matrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{matrix} \right\}$$

la stessa operazione, con un opportuno accorgimento, può essere compiuta sul tensore di deformazione, infatti si ha

$$\{\tilde{\varepsilon}\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{Bmatrix}$$

Legame fra il tensore di deformazione e il tensore degli sforzi

Esistono dei legami fra le deformazioni e gli sforzi. Essendo due vettori il legame può essere espresso sotto forma di matrice, quindi si ha

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad \text{e} \quad \{\varepsilon\} = [F]\{\sigma\}.$$

Se ci sono anche delle dilatazioni termiche, le deformazioni non dipenderanno solo dagli sforzi, infatti,

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}_M + \{\varepsilon\}_T \quad \{\varepsilon\}_T = \{\alpha\}\Delta T \quad \{\varepsilon\} = [F]\{\sigma\} + \{\alpha\}\Delta T$$

gli sforzi dipendono solo dalle deformazioni di natura meccanica, si avrà

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}_M = [D](\{\varepsilon\} - \{\sigma\}\Delta T)$$

Le matrici di deformazione [D] ed [F] sono delle matrici simmetriche.

Per provarlo prendiamo in considerazione il lavoro di deformazione, sappiamo che esso non è un differenziale esatto ma una variazione virtuale del lavoro, poiché lo spostamento che attuo è uno spostamento infinitesimo, congruente e qualsiasi.

Dal PLV sappiamo che, avendo dei vincoli bilateri

$$\delta^* L = 0$$

se i vincoli fossero unilateri il lavoro virtuale infinitesimo sarebbe $\delta^* L < 0$.

Se ancora siamo in un campo elastico, che non significa lineare, ma conservativo perché il materiale restituisce tutta l'energia immagazzinata, in tal caso il lavoro è il differenziale esatto di un'energia potenziale V_d :

$$\left. \begin{aligned} \delta^* L_d = \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} = dV_d = \sum_{i=1}^6 \sigma_i \delta\varepsilon_i \\ dV_d = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial V_d}{\partial \varepsilon_i} \delta\varepsilon_i \end{aligned} \right\} \sigma_i = \frac{\partial V_d}{\partial \varepsilon_i}$$

dal legame sforzi deformazioni sappiamo che

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^6 D_{ik} \varepsilon_k \Rightarrow D_{ik} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_k} = \frac{\partial^2 V_d}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_k} = \frac{\partial^2 V_d}{\partial \varepsilon_k \partial \varepsilon_i} = D_{ki}$$

Abbiamo dimostrato che la matrice $[D]$ è simmetrica, se il campo è elastico ed esiste la funzione potenziale, la matrice $[F]$ è simmetrica perché si ottiene invertendo la $[D]$.

I corpi che andiamo a trattare nella maggior parte dei casi, possono essere considerati in buona approssimazione isotropi. Questa ulteriore ipotesi più quelle precedentemente fatte, più il fatto che le matrici $[D]$ ed $[F]$ sono simmetriche, ci consentono di affermare che il legame fra gli sforzi e le deformazioni dipende solo da due costanti da determinare nella matrice $[D]$.

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}$$

Nel caso monodimensionale di un provino sottoposto a trazione, l'unica componente degli sforzi non nulla è quella orientata nel verso della forza ($\sigma_x \neq 0$).

Si avrà una deformazione che vale

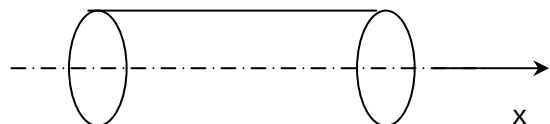
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x.$$

L'isotropia richiede anche un legame fra E e G che sarà,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Tra le configurazioni di equilibrio ci interessano soltanto quelle stabili cioè quelle che presentano l'energia minima, a partire da queste configurazioni posso avere soltanto variazioni positive di energia

$$dV_d = \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^T [D] \{\delta\varepsilon\} = d\left(\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\}\right) > 0$$



V_d deve essere una forma quadratica definita positiva e quindi anche $[D]$ è definita positiva altrimenti il materiale non sarebbe coerente (applicando delle deformazioni si devono avere degli sforzi).

Il fatto che la matrice $[D]$ sia definita positiva implica che tutti i suoi autovalori siano positivi, e che le costanti E e G della matrice $[D]$ sono anch'essi positivi. Al contrario della costante ν che risulta $-1 < \nu < 0.5$.

Principi energetici

Ritornando al principio dei lavori virtuali, se i vincoli sono bilateri possiamo scrivere

$$\delta^* L = 0$$

$$\delta^* L_e + \delta^* L_i = 0$$

Scomponendo il lavoro virtuale nella somma di quello prodotto dalle forze esterne e quello prodotto dalle forze interne, capiamo facilmente che il lavoro virtuale delle forze interne è sempre opposto al lavoro di deformazione, quindi si ha

$$\delta^* L_d = -\delta^* L_i \Rightarrow \delta^* L_e = \delta^* L_d$$

se supponiamo di stare in un campo di forze conservative, possiamo scrivere

$$\delta^* L_d = \delta V_d \quad \delta^* L_e = -\delta V_e$$

$$\delta^* L = 0 \Rightarrow \delta V_e + \delta V_d = 0 \Rightarrow \delta(V_e + V_d) = 0$$

Il principio della minima energia potenziale totale (stazionarietà dell'energia potenziale totale) ci dice che la configurazione d'equilibrio fra tutte quelle congruenti è quella che rende stazionaria l'energia potenziale totale.

L'equilibrio è una condizione di stazionarietà dell'energia, l'equilibrio è stabile se l'energia ha un minimo, è instabile se l'energia ha un massimo.

Il PLV vale anche per forze non conservative (in tal caso non vale la stazionarietà).

Il PLVC vale solo se le deformazioni reali sono infinitesime, altrimenti non abbiamo l'equilibrio.

Integrando il PLV si ottiene il principio di stazionarietà dell'energia.

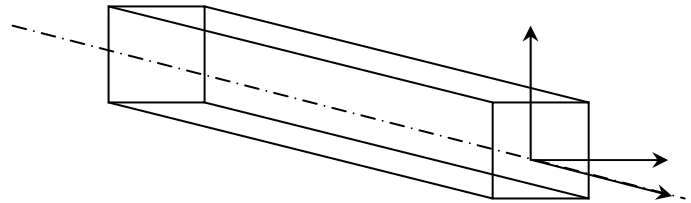
Integrando il PLVC si ottiene il principio di Menabrea.

Principio di Menabrea: fra tutte le configurazioni equilibrate, la congruente risulta essere quella che minimizza l'energia di deformazione. Attenzione che vale solo finché gli spostamenti sono infinitesimi.

Schema a travi

Se abbiamo a che fare con una struttura, essa può apparirci più o meno complicata, ma sicuramente essa può essere considerata come la somma insiemistica di più travi.

La trave è un solido prismatico che si ottiene da una figura piana che trasla lungo una linea perpendicolare alla figura stessa. L'asse della trave è una retta parallela alla traslazione e passante per un punto di riferimento arbitrario della sezione. Non possiamo ancora parlare di baricentro o di assi principali d'inerzia perché non conosciamo le caratteristiche della trave; inoltre non è



detto che risulti conveniente prendere come asse della trave l'asse principale d'inerzia baricentrico, la scelta dipenderà dal problema che si deve affrontare. Scegliamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale sotto l'ipotesi di materiale omogeneo e supponendo che i carichi siano applicati solo alle estremità.

Le azioni interne sono, sezione per sezione, quel sistema di forze dirette lungo gli assi di riferimento, tali da mantenere in equilibrio la trave soggetta ai carichi esterni.

Definiamo taglio le T_x e T_y , azione assiale la T_z e poi ci sono anche i momenti M_x , M_y e M_z .

Nello schema a trave si tiene conto solo degli effetti lontani dei carichi (non conta la reale distribuzione delle forze ma solo la risultante delle stesse). Molto spesso, infatti, (si pensi alla distribuzione del carico aerodinamico su un'ala inflessa durante il volo) lo sforzo locale (dovuto alla pressione) è un infinitesimo rispetto agli sforzi all'interno del volume che sono l'effetto (l'integrale) degli sforzi locali suddetti (gli effetti vicini).

Vediamo se l'approssimazione fatta è accettabile, consideriamo una trave di alluminio.

Conoscendo la struttura, le sue caratteristiche e i carichi cui è soggetta trovo uno stato di sforzo pari a $\sigma \cong 10 \text{ kg/mm}^2$ (effetti lontani).

Il carico alare è una pressione media distribuita sull'ala, nell'intorno di un punto agisce lo sforzo locale $\sigma_e = \frac{Q}{S} \cong 100 \text{ kg/m}^2 = 100 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^2 = 10^{-4} \text{ kg/mm}^2$ (effetti vicini).

Abbiamo appurato che l'effetto vicino è effettivamente trascurabile rispetto all'effetto lontano, non si può neanche parlare di errore di approssimazione.

In certi casi, però, questo non è più vero e si usa allora dividere la soluzione in una soluzione centrale (che tiene conto solo degli effetti lontani) e in una soluzione d'estremità (si corregge la soluzione centrale tenendo conto dell'effetto concentrato di carichi e di vincoli).

Quest'ultima soluzione elimina le discontinuità di sforzo che altrimenti si creerebbero nella struttura.

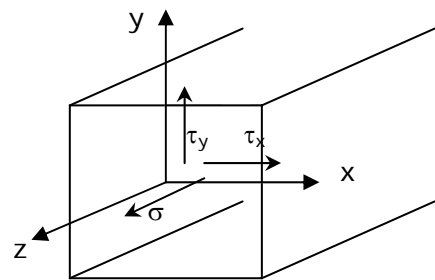
Sforzi normali

Sappiamo che il tensore degli sforzi può essere scritto sottoforma di vettore, e se avessimo di fronte un problema qualunque dovremmo calcolare tutte le sue componenti. Ma possiamo prendere in esame un modello semplificato per il quale le sole componenti non nulle sono:

$$\sigma_{zz} = \sigma \neq 0 \quad \tau_{xz} = \tau_x \neq 0 \quad \tau_{yz} = \tau_y \neq 0$$

dal legame sforzi deformazioni abbiamo,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -\frac{\nu}{E} \sigma_z & \varepsilon_y &= -\frac{\nu}{E} \sigma_z & \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} \\ \gamma_{xy} &= 0 & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_x}{G} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_y}{G} \end{aligned}$$



la trave si allunga ($\varepsilon_z > 0$) e la sezione si restringe ($\varepsilon_y = \varepsilon_x < 0$).

Per determinare gli sforzi dobbiamo imporre l'equilibrio e la congruenza. Partiamo con il verificare l'equilibrio:

$$T_z = \int_A \sigma dA \quad T_x = \int_A \tau_x dA \quad T_y = \int_A \tau_y dA$$

$$M_z = \int_A (\tau_y x - \tau_x y) dA \quad M_x = \int_A \sigma y dA \quad M_y = \int_A -\sigma x dA$$

Le azioni interne fanno equilibrio ai carichi esterni, queste relazioni però sono condizioni d'equivalenza e non d'equilibrio perché esprimono l'equivalenza tra le forze interne e sforzi interni.

Possiamo notare che le σ sono disaccoppiate dalle τ (non sono presenti in una stessa relazione) e possiamo determinarle separatamente perché non ho legami tra le ε e le γ , cioè ε genera σ ma non τ e γ genera τ ma non σ , l'equilibrio è garantito in modo separato.

Nei materiali compositi c'è invece accoppiamento tra ε e γ .

Adesso bisogna trovare la configurazione congruente, quindi applichiamo il teorema di Menabrea che ci dice di minimizzare l'energia di deformazione:

$$V_d = V_d(\sigma) + V_d(\tau) = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_{A,l} \varepsilon \sigma dA dz = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \frac{\sigma^2}{E} dA dz$$

Il contributo energetico delle τ non viene considerato perché le τ sono disaccoppiate dalle σ

tenendo conto dei vincoli di equilibrio,

$$T_z - \int_A \sigma dA = 0 \quad M_x - \int_A \sigma y dA = 0 \quad M_y + \int_A \sigma x dA = 0$$

$$\int_A \left(\frac{T_z}{A} - \sigma \right) dA = 0 \quad \int_A \left(\frac{M_x}{A} - \sigma y \right) dA = 0 \quad \int_A \left(\frac{M_y}{A} + \sigma x \right) dA = 0$$

Per inserire i vincoli nella funzione da minimizzare uso la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange,

$$F_1(\sigma) = \iint_{A,l} \left[\frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} + \lambda_1 \left(\frac{T_z}{A} - \sigma \right) + \lambda_2 \left(\frac{M_x}{A} - \sigma y \right) + \lambda_3 \left(\frac{M_y}{A} + \sigma x \right) \right] dA dz$$

ma dato che i vincoli devono valere su tutto l'asse z , possiamo inserirli nell'integrale esteso non solo all'area A ma anche all'asse stesso.

Il funzionale che deve essere minimizzato sarà soltanto la funzione integranda:

$$F(\sigma) = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} + \lambda_1 \left(\frac{T_z}{A} - \sigma \right) + \lambda_2 \left(\frac{M_x}{A} - \sigma y \right) + \lambda_3 \left(\frac{M_y}{A} + \sigma x \right)$$

deriviamo rispetto a σ ,

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{E} - \lambda_1 - \lambda_2 y + \lambda_3 x = 0 \Rightarrow \sigma = E\lambda_1 + E\lambda_2 y - E\lambda_3 x$$

sostituiamo nei vincoli l'espressione di σ ricavata,

$$T_z = \int_A (E\lambda_1 + E\lambda_2 y - E\lambda_3 x) dA = E\lambda_1 \int_A dA + E\lambda_2 \int_A y dA - E\lambda_3 \int_A x dA = E\lambda_1 A + E\lambda_2 S_x - E\lambda_3 S_y$$

$$M_x = \int_A (E\lambda_1 y + E\lambda_2 y^2 - E\lambda_3 xy) dA = E\lambda_1 \int_A y dA + E\lambda_2 \int_A y^2 dA - E\lambda_3 \int_A xy dA = E\lambda_1 S_x + E\lambda_2 J_x - E\lambda_3 J_{xy}$$

$$M_y = - \int_A (E\lambda_1 x + E\lambda_2 xy - E\lambda_3 x^2) dA = -E\lambda_1 \int_A x dA - E\lambda_2 \int_A xy dA + E\lambda_3 \int_A x^2 dA = -E\lambda_1 S_y - E\lambda_2 J_{xy} + E\lambda_3 J_y$$

Momento statico

Momento centrifugo

Momento d'inerzia

Con un'opportuna scelta degli assi possiamo semplificare le espressioni trovate di T_z , M_x e M_y . Infatti, ponendoci sugli Assi Principali d'Inerzia i momenti statici e centrifughi si annullano, si ha

$$T_z = E\lambda_1 A \quad M_x = E\lambda_2 J_x \quad M_y = E\lambda_3 J_y$$

$$\lambda_1 = \frac{T_z}{EA} \quad \lambda_2 = \frac{M_x}{EJ_x} \quad \lambda_3 = \frac{M_y}{EJ_y}$$

sostituendo i valori ottenuti dei moltiplicatori di Lagrange, nell'espressione degli sforzi si ottiene,

$$\sigma = \frac{T_z}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x$$

Vale solo per Assi Principali d'Inerzia

Ricordiamo che, se la sezione non è omogenea, non possiamo parlare di assi principali d'inerzia.

Principio dei lavori virtuali (PLV)

Il principio dei lavori virtuali afferma: *CNS affinché una struttura sia in equilibrio è che i lavori virtuali di tutte le forze siano minori o uguali a zero.* Esso richiede:

- equilibrio;
- sistema di forze reali;
- sistema di spostamenti virtuali;
 1. infinitesimi;
 2. arbitrari;
 3. congruenti.

Lo spostamento deve essere infinitesimo, perché se né applichiamo uno troppo grande, possiamo ritrovarci in uno stato molto lontano che non ci permette più di tornare nel punto di partenza. Quindi non possiamo più affermare che il punto di partenza era o no d'equilibrio.

Lo spostamento deve essere arbitrario, perché dobbiamo essere sicuri che il lavoro virtuale risulti nullo per ogni spostamento e non per uno in particolare.

Lo spostamento deve essere congruente, perché se non rispettiamo i vincoli, non possiamo studiare l'equilibrio.

Principio dei lavori virtuali complementari (PLVC)

Il principio dei lavori virtuali complementari afferma: *CNS affinché una struttura sia congruente è che i lavori virtuali complementari di tutte le forze siano minori o uguali a zero.*

Esso richiede:

- congruenza;
- sistema di spostamenti reali;
- sistema di forze virtuali;
- 4. infinitesime;
- 5. arbitrare;
- 6. equilibrate.

La forza deve essere infinitesima, perché dobbiamo essere sicuri di non deformare la struttura.

La forza deve essere arbitraria, perché dobbiamo essere sicuri che il lavoro virtuale risulti nullo per ogni forza e non per una in particolare.

La forza deve essere equilibrata, perché altrimenti rischiamo di accelerare il corpo e di farlo muovere.

Lavoro di deformazione

Andiamo a trovare l'espressione del lavoro di deformazione, e per determinarlo useremo il principio dei lavori virtuali. Potremmo usare anche il PLVC arrivando alla stessa espressione.

$$\delta^* L_d = \int_V \{\sigma\}^T \{\delta \varepsilon\} dV$$

Spostamenti fittizi (PLV)

$$\delta^* L_d = \iint_{A,l} \frac{\sigma \sigma'}{E} dA dz$$

$$\delta^* L_d = \iint_{A,l} \frac{1}{E} \left(\frac{T_z}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x \right) \left(\frac{T'_z}{A} + \frac{M'_x}{J_x} y - \frac{M'_y}{J_y} x \right) dA dz$$

Poiché i tagli e i momenti non variano sulla sezione, possono essere portati fuori dall'integrale esteso all'area A.

Integrando i termini misti sull'area A, compaiono i momenti statici. Ponendoci su un sistema d'Assi Principali d'Inerzia questi ultimi saranno nulli, ciò ci permette di eliminare i termini misti.

$$\delta^* L_d = \iint_{A,l} \frac{1}{E} \left(\frac{T_z T'_z}{A} + \frac{M_x M'_x}{J_x^2} y^2 + \frac{M_y M'_y}{J_y^2} x^2 \right) dA dz$$

$$\delta^* L_d = \int_l \left(\frac{T_z T'_z}{EA} + \frac{M_x M'_x}{EJ_x} + \frac{M_y M'_y}{EJ_y} \right) dz$$

L'espressione trovata è il lavoro di deformazione dovuto alle σ .

Non abbiamo ancora ricavato l'espressione di τ , tuttavia possiamo pensare di ottenere il lavoro di deformazione dovuto alle τ facendo un ragionamento analogo a quello fatto in precedenza per le σ .

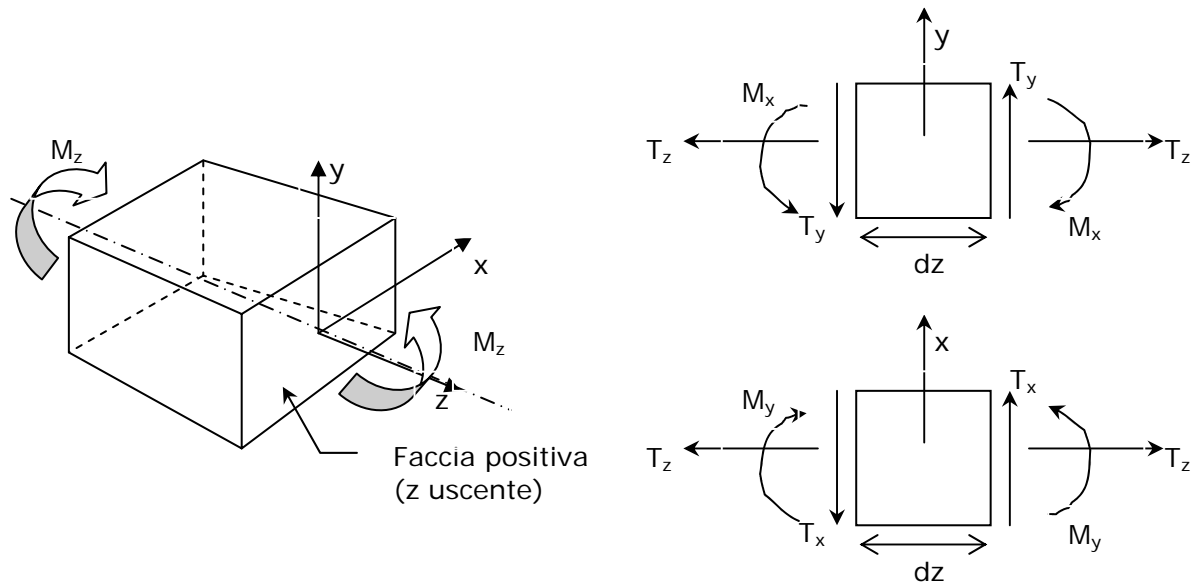
Il lavoro di deformazione avrà un'espressione del tipo:

$$\delta^* L_d(\tau) = \int_l \left(\frac{T_x T'_x}{GA_x} + \frac{T_y T'_y}{GA_y} + \frac{M_z M'_z}{GJ_t} \right) dz$$

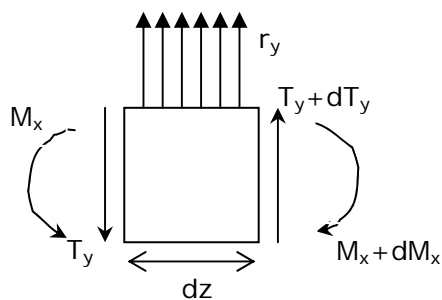
Il termine $\frac{1}{GJ_t}$ è chiamato fattore di torsione, A_x e A_y sono opportuni valori fittizi della sezione ancora da determinare, che vengono ricavati da manuali.

Calcolo delle azioni interne

Per studiare le azioni interne nelle travi, è necessario avere bene in mente le convenzioni di segno:

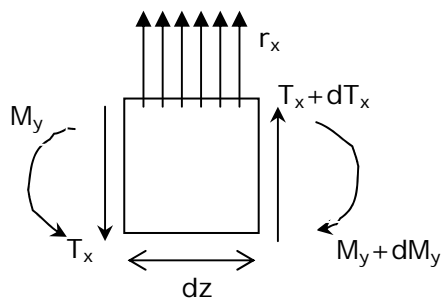


Poiché nelle strutture aeronautiche si ha spesso a che fare con carichi distribuiti con legge variabile (si pensi al carico aerodinamico agente sull'ala), l'unico modo per determinare le azioni interne è evidentemente quello di ricorrere ad opportune relazioni differenziali:



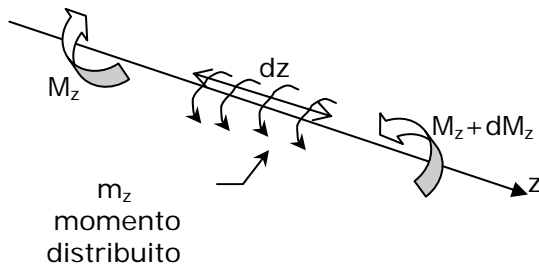
$$T_y + dT_y - T_y + r_y dz = 0 \rightarrow dT_y = -r_y dz$$

$$M_x + dM_x - M_x + r_y \frac{dz^2}{2} - T_y dz = 0 \rightarrow dM_x = T_y dz$$



$$T_x + dT_x - T_x + r_x dz = 0 \rightarrow dT_x = -r_x dz$$

$$M_y + dM_y - M_y - r_x \frac{dz^2}{2} + T_x dz = 0 \rightarrow dM_y = -T_x dz$$



$$M_z + dM_z - M_z + m_z dz = 0$$

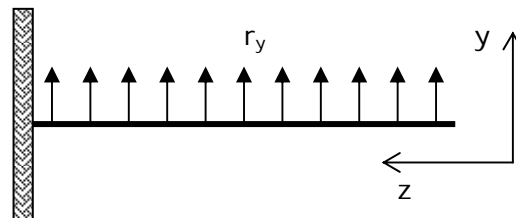
$$dM_z = -m_z dz$$

Carico distribuito costante

$$\begin{cases} dT_y = -r_y dz \\ dM_x = T_y dz \end{cases}$$

$$\int_0^z dT_y = \int_0^z -r_y dz$$

$$\int_0^z dM_x = \int_0^z T_y dz$$



$$T_y(z) - T_y(0) = -r_y z$$

$$M_x(z) - M_x(0) = -r_y \frac{z^2}{2}$$

la trave è libera in $z=0$, quindi $T_y(0)=M_x(0)=0$, le azioni interne sono:

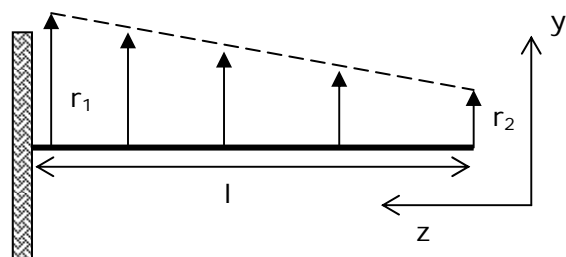
$$T_y = -r_y z$$

$$M_x = -r_y \frac{z^2}{2}$$

Carico distribuito lineare

$$r_y(z) = r_2 + \frac{r_1 - r_2}{l} z$$

$$T_y(0) = M_x(0) = 0$$



$$T_y = \int_0^z -r_y dz = -r_2 z - \frac{r_1 - r_2}{l} \frac{z^2}{2}$$

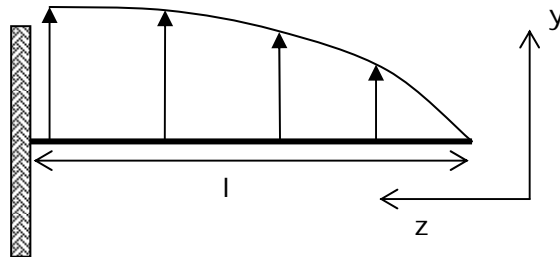
$$M_x = \int_0^z T_y dz = -r_2 \frac{z^2}{2} - \frac{r_1 - r_2}{l} \frac{z^3}{6}$$

Carico distribuito parabolico

$$r_y(z) = Az^2 + Bz$$

$$T_y = -A \frac{z^3}{3} - B \frac{z^2}{2}$$

$$M_x = -A \frac{z^4}{12} - B \frac{z^3}{6}$$



Sugli aerei le azioni assiali sono rilevanti solo nelle manovre o in particolari punti. Sulle pale dell'elicottero invece, le azioni assiali sono rilevanti sempre. I momenti flettenti sugli aerei possono essere distribuiti (poco frequenti) o concentrati (frequenti: motore a sbalzo).

È bene osservare che le leggi differenziali trovate sono indipendenti dall'orientazione della terna (pur di rispettare le convenzioni); è inoltre ovvio il fatto che, pur potendo i diagrammi delle azioni interne cambiare da un sistema di riferimento all'altro, le azioni risultanti sulla struttura dovranno essere univoche.

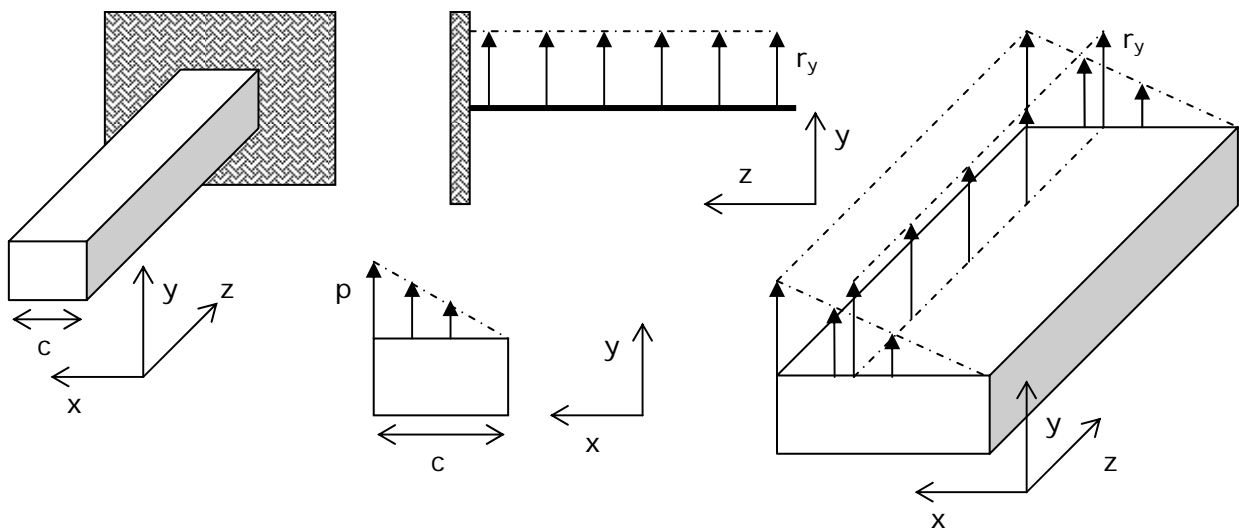
Travi tridimensionali

La struttura di una semiala viene rappresentata da una trave incastrata ad una estremità.

Se la struttura è isostatica il calcolo delle azioni interne non risente della forma della sezione e della distribuzione dei carichi esterni.

Per semplicità supponiamo che la sezione sia rettangolare e costante lungo l'apertura.

Consideriamo un carico triangolare sulla generica sezione. La prima cosa da fare è scegliere un sistema di riferimento, cioè scegliere l'origine, il verso e la posizione dell'asse z sulla sezione generica:



Scegliamo l'origine dell'asse z sull'estremo libero. Dobbiamo determinare su una generica sezione la risultante r_y del carico p , per poi integrare r_y lungo l'asse z per ottenere la risultante del carico esterno sulla trave.

Consideriamo positive (cioè dirette come gli assi) le azioni agenti sulla faccia positiva, cioè quella che ha l'asse z uscente.

Otterremo le seguenti azioni interne:

$$dT_y = -r_y dz$$

$$dM_x = T_y dz$$

queste non dipendono dalla posizione dell'asse z sulla sezione, quindi non è stato necessario finora scegliere il punto della sezione per cui passa l'asse z .

Il momento torcente M_z dipende invece dalla posizione dell'asse z .

Per determinare gli sforzi con la regola

$$\sigma = \frac{T_z}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x$$

dobbiamo valutare le azioni interne rispetto agli assi principali d'inerzia.

Se usiamo assi paralleli agli assi principali d'inerzia, taglio e flessione non variano, quindi possiamo ricavare gli sforzi, varia invece il momento torcente.

La sezione presenta due modi distinti di muoversi: i movimenti di flessione e taglio avvengono attorno agli assi principali d'inerzia e quindi attorno al baricentro, il momento di torsione avviene attorno al centro di taglio che non necessariamente coincide con il baricentro.

Non esiste quindi una scelta degli assi di riferimento che vada bene per entrambi i movimenti.

Nel nostro caso andiamo a vedere diverse scelte del sistema di riferimento, tutte perfettamente lecite.

I scelta.

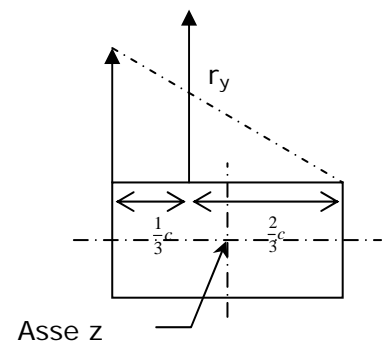
Ipotizziamo di posizionare l'asse z sul centro della sezione, non possiamo parlare di baricentro perché non sappiamo nulla su come è fatta la sezione della trave.

Andiamo a calcolarci le azioni interne:

$$r_y = \frac{1}{2} pc$$

$$\int_{T_0}^{T(z)} dT_y = \int_0^z -\frac{1}{2} pc dz \Rightarrow T_y(z) = -\frac{1}{2} pc z$$

$$\int_{M_{x0}}^{M_x(z)} dM_x = \int_0^z T_y dz \Rightarrow M_x(z) = -\frac{1}{4} pc z^2$$



Il taglio è lineare e decrescente lungo l'asse z , mentre il momento flettente sarà parabolico e decrescente lungo l'apertura della trave.

Il carico distribuito r_y lungo l'apertura determina un momento torcente distribuito lungo z , che sarà

$$|m_z| = r_y b = r_y \left(\frac{1}{2} c - \frac{1}{3} c \right) = \frac{1}{2} pc \left(\frac{1}{6} c \right) = \frac{1}{12} pc^2$$

Il momento torcente sarà:

$$\int_0^z dM_z = \int_0^z -m_z dz \Rightarrow M_z(z) = -\frac{1}{12} pc^2 z$$

II scelta.

Ipotizziamo questa volta di posizionare l'asse z sul lato sinistro della sezione. Il calcolo del taglio e del momento flettente non cambia, quindi i risultati ottenuti in precedenza sono ancora validi. Cambia il momento torcente perché è variato, rispetto a prima, il braccio.

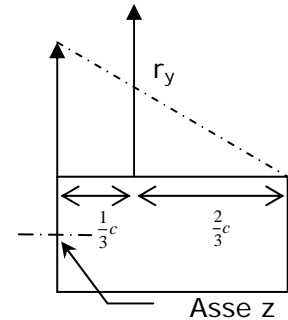
Il momento torcente distribuito sarà:

$$|m_z| = r_y b = r_y \left(\frac{1}{3} c \right) = \frac{1}{6} p c^2$$

Il momento torcente sarà:

$$\int_0^{M_z(z)} dM_z = \int_0^z m_z dz \Rightarrow M_z(z) = \frac{1}{6} p c^2 z$$

Il momento distribuito
è discorde al Momento
torcente

**III scelta.**

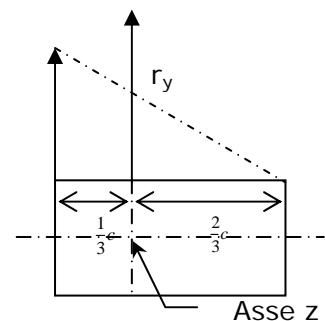
Ipotizziamo infine di posizionare l'asse z sulla verticale della risultante r_y . Il calcolo del taglio e del momento flettente non cambia, quindi i risultati ottenuti in precedenza sono ancora validi. Cambia il momento torcente perché è variato, anche questa volta, il braccio.

Il nuovo momento torcente distribuito sarà:

$$|m_z| = r_y b = r_y 0 = 0$$

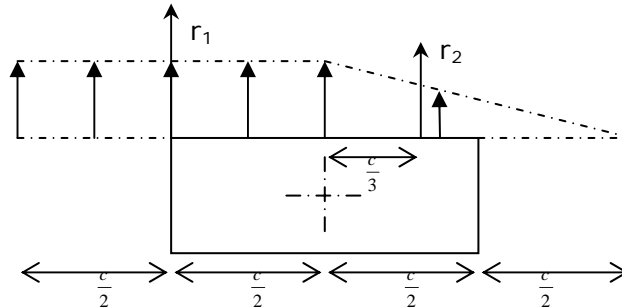
Il momento torcente sarà banalmente nullo,

$$M_z(z) = 0$$



Le azioni interne sono state calcolate facendo equilibrio ai carichi esterni che restano gli stessi nelle tre scelte, quindi i tre sistemi ottenuti sono equivalenti anche se le espressioni sono diverse. Otterremo diagrammi diversi ma su una data sezione i tre metodi mi danno le stesse azioni interne.

Supponiamo di prendere in considerazione un cassone. Il cassone è una struttura che assorbe anche le forze che non agiscono direttamente su di esso. Possiamo pensare di rappresentare la struttura come una trave su cui agiscono due carichi distribuiti differenti, ma costanti lungo l'asse z.



La risultante totale sarà la somma delle singole risultanti, cioè

$$r_y = r_1 + r_2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} r_1 = pc \\ r_2 = \frac{1}{2} pc \end{array} \right\} r_y = \frac{3}{2} pc$$

il taglio e il momento flettente saranno dati dall'integrazione lungo l'asse z, si ottiene

$$\begin{aligned} T_y &= -\frac{3}{2} pc z \\ M_x &= -\frac{3}{4} pc z^2 \end{aligned}$$

Il momento torcente sarà ottenuto dall'integrazione della somma dei due momenti distribuiti, che sono discordi. Si ha

$$m_z = m_{z1} + m_{z2} = r_1 \frac{c}{2} - r_2 \frac{c}{3} = \frac{1}{2} pc^2 - \frac{1}{6} pc^2 = \frac{1}{3} pc^2$$

$$M_z = \int_0^z -m_z dz = \int_0^z -\frac{1}{3} pc^2 dz = -\frac{1}{3} pc^2 z$$

Se il carico p non è costante lungo la trave, e supponiamo che la dipendenza sia lineare, si ottiene:

$$p = A + Bz \quad r_y = \frac{3}{2} pc$$

il taglio e il momento flettente diventeranno:

$$T_y = \int_0^z -\frac{3}{2} p c dz = -\frac{3}{2} c \int_0^z (A + Bz) dz = -\frac{3}{2} c \left(Az + \frac{1}{2} Bz^2 \right) \quad T_y = -\frac{3}{2} c \left(Az + \frac{1}{2} Bz^2 \right)$$

$$M_x = \int_0^z T_y dz = -\frac{3}{2} c \int_0^z \left(Az + \frac{1}{2} Bz^2 \right) dz = -\frac{3}{2} c \left(\frac{1}{2} Az^2 + \frac{1}{6} Bz^3 \right) \quad M_x = -\frac{3}{2} c \left(\frac{1}{2} Az^2 + \frac{1}{6} Bz^3 \right)$$

infine il momento torcente diventerà,

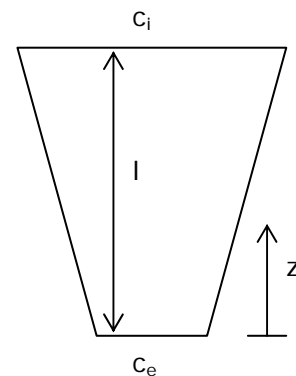
$$M_z = \int_0^z -\frac{1}{3} p c^2 dz = -\frac{1}{3} c^2 \int_0^z (A + Bz) dz = -\frac{1}{3} c^2 \left(Az + \frac{1}{2} Bz^2 \right) \quad M_z = -\frac{1}{3} c^2 \left(Az + \frac{1}{2} Bz^2 \right)$$

Ala trapezia (corda variabile)

Questo caso prende in considerazione il fatto che la corda non sia costante lungo l'asse z , quindi c dipende dalla variabile z . La dipendenza sarà lineare e facilmente calcolabile tramite la relazione:

$$c(z) = c_e + \frac{c_i - c_e}{l} z = C + Dz$$

ipotizziamo che il carico p sia variabile lungo z e che la risultante totale sia quella dell'esempio precedente.
Si ottengono i seguenti carichi interni:



$$T_y = \int_0^z -\frac{3}{2} p c dz = -\frac{3}{2} \int_0^z (A + Bz)(C + Dz) dz \quad T_y = -\frac{3}{2} \left(ACz + (AD + BC) \frac{z^2}{2} + BD \frac{z^3}{3} \right)$$

$$M_x = \int_0^z T_y dz \quad M_x = -\frac{3}{2} \left(AC \frac{z^2}{2} + (AD + BC) \frac{z^3}{6} + BD \frac{z^4}{12} \right)$$

$$M_z = \int_0^z -\frac{1}{3} p c^2 dz = -\frac{1}{3} \int_0^z (A + Bz)(C + Dz)^2 dz$$

$$M_z = -\frac{1}{3} \left(AC^2 z + (BC^2 + 2ACD) \frac{z^2}{2} + (AD^2 + 2BCD) \frac{z^3}{3} + BD^2 \frac{z^4}{4} \right)$$

Quando abbiamo un'ala rastremata bisogna stare molto attenti all'asse che si sceglie per il calcolo delle azioni interne. Infatti, si può scegliere il bordo d'attacco o di uscita solo se essi sono perpendicolari al piano delle sezioni, se

non lo sono si commette, nel caso si scelgano, un errore che è proporzionale all'angolo fra il bordo e il piano della sezione.

Oppure si può scegliere un qualunque asse perpendicolare alle sezioni, ma che tenga conto della variazione del braccio del momento torcente al variare della corda.

Portiamo ad esempio un'ala con bordo d'attacco perpendicolare e facciamo due scelte differenti: la prima posizioniamo l'asse z sul bordo d'attacco perpendicolare; la seconda posizioniamo l'asse z alla fine della sezione esterna dell'ala.

I scelta:

$$c(z) = c_e + \frac{c_i - c_e}{l} z = A + Bz$$

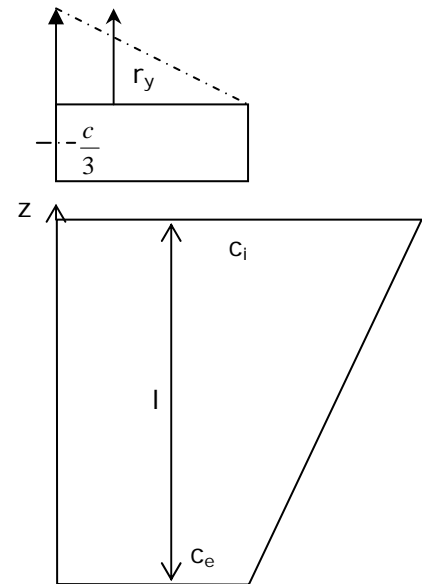
$$r_y = \frac{1}{2} pc = \frac{1}{2} p(A + Bz)$$

$$T_y = \int -r_y dz = -\frac{1}{2} p \left(Az + \frac{1}{2} Bz^2 \right)$$

$$M_x = \int T_y dz = -\frac{1}{4} p \left(Az^2 + \frac{1}{3} Bz^3 \right)$$

$$m_z = -\frac{1}{2} pc \cdot \frac{1}{3} c = -\frac{1}{6} p(A^2 + 2ABz + z^2)$$

$$M_z = \int -m_z dz = \frac{1}{6} p \left(A^2 z + ABz^2 + \frac{1}{3} B^2 z^3 \right)$$



II scelta:

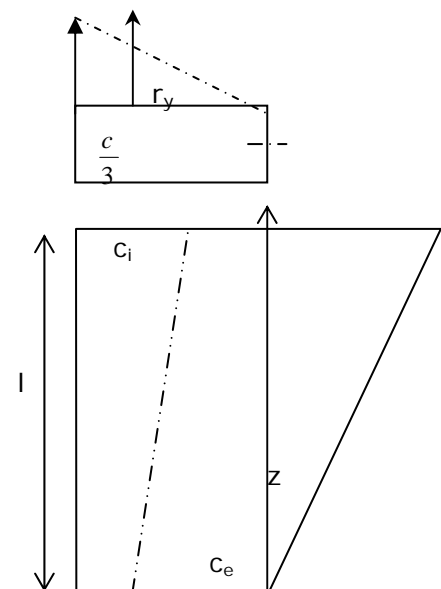
il taglio e il momento flettente non cambiano, non dipendendo dal braccio, che non vale più $b = \frac{c}{3}$, ma questa volta dipende dalla variabile z . Il braccio segue una regola del tipo:

$$b(z) = b_e + \frac{b_i - b_e}{l} z$$

dove

$$b_e = \frac{2}{3} c_e \quad b_i = c_e - \frac{1}{3} c_i$$

Con questa relazione si ottiene il nuovo momento torcente.



Calcolo di Iperstatiche e Spostamenti

Per risolvere le strutture iperstatiche usiamo il PLVC. Bisogna stare attenti nel valutare l'effettiva labilità o iperstaticità di una struttura. Ad esempio un'ordinata di una fusoliera è in equilibrio pur non essendo vincolata da nessuna parte, allora si tratta di una struttura labile o sei volte iperstatica!?

Se la struttura è isostatica, calcoliamo le azioni interne senza considerare le caratteristiche della sezione e del materiale, e poi ricaviamo subito gli sforzi.

Se la struttura è iperstatica il calcolo delle degli sforzi e degli spostamenti dipende dalla deformabilità della struttura, a causa dei vincoli presenti.

Ad esempio un tavolino con tre gambe è isostatico e poggia su tutte e tre le gambe. Ma se le gambe sono quattro, la quarta gamba non poggia perfettamente, se non esercitando una forza sul tavolo che produca delle deformazioni.

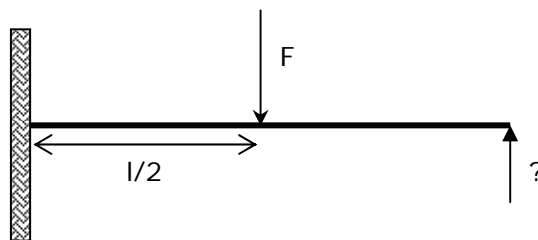
Andiamo a vedere alcuni semplici esempi, che ci chiariranno il metodo per calcolare sia le iperstatiche che eventuali spostamenti delle strutture prese in esame.

Come prima cosa dobbiamo identificare il sistema reale (che è legato agli spostamenti) e il sistema fittizio (che è legato alle forze).

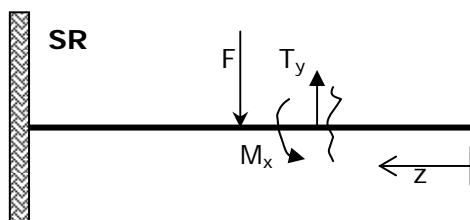
Se vogliamo determinare una componente di spostamento applichiamo una forza fittizia (unitaria) nel punto scelto e concorde con lo spostamento.

Esempio 1

Prendiamo in considerazione una trave, lunga l , incastrata ad un estremo e caricata in mezzzeria da una forza F . Vogliamo determinare lo spostamento s_y dell'estremo libero.

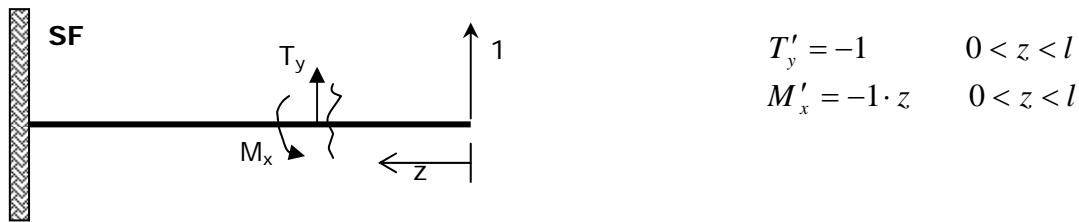


Cominciamo con il distinguere i due sistemi, reale e fittizio, calcolando le azioni interne per entrambi.



$$T_y = \begin{cases} 0 & 0 < z < \frac{l}{2} \\ F & \frac{l}{2} < z < l \end{cases}$$

$$M_x = \begin{cases} 0 & 0 < z < \frac{l}{2} \\ F\left(z - \frac{l}{2}\right) & \frac{l}{2} < z < l \end{cases}$$



A questo punto dobbiamo uguagliare il lavoro esterno infinitesimo con il lavoro di deformazione, che avranno rispettivamente le seguenti espressioni:

$$\delta L_e = 1 \cdot s_y \quad \delta L_d = \int \left(\frac{T'_y T_y}{GA_y^*} + \frac{M'_x M_x}{EJ_x} \right) dz$$

Nell'espressione del lavoro di deformazione mancano gli altri termini, poiché siamo in uno stato piano di sforzo, in più andiamo a trascurare anche il termine in cui compare il T_y supponendo l'asta "snella".

Il lavoro di deformazione diventa,

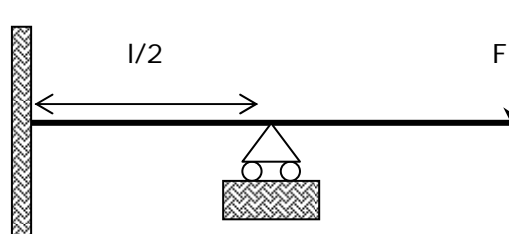
$$\delta L_d = \int_0^l \frac{M'_x M_x}{EJ_x} dz = \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{-1 \cdot z \cdot F \left(z - \frac{l}{2} \right)}{EJ_x} dz = \frac{1}{EJ_x} \left[-F \frac{z^3}{3} + Fl \frac{z^2}{4} \right]_{\frac{l}{2}}^l = \delta L_e$$

$$s_y = \frac{1}{EJ_x} \left[-\frac{5}{48} Fl^3 \right]$$

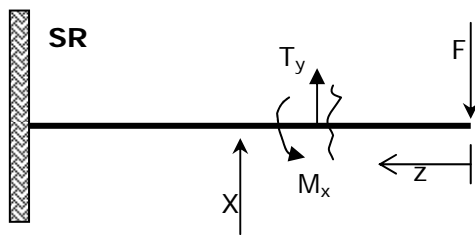
Esempio 2

Calcolo della reazione iperstatica.

Vogliamo calcolare la reazione iperstatica di una struttura così fatta:

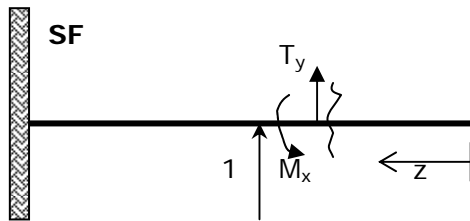


Per determinare l'incognita iperstatica applichiamo una forza fittizia (unitaria) concorde con l'iperstatica, e andiamo a costruirci i due sistemi:



$$T_y = \begin{cases} F & 0 < z < \frac{l}{2} \\ F - X & \frac{l}{2} < z < l \end{cases}$$

$$M_x = \begin{cases} Fz & 0 < z < \frac{l}{2} \\ Fz - X\left(z - \frac{l}{2}\right) & \frac{l}{2} < z < l \end{cases}$$



$$T'_y = \begin{cases} 0 & 0 < z < \frac{l}{2} \\ -1 & \frac{l}{2} < z < l \end{cases}$$

$$M'_x = \begin{cases} 0 & 0 < z < \frac{l}{2} \\ -1 \cdot \left(z - \frac{l}{2}\right) & \frac{l}{2} < z < l \end{cases}$$

Questa volta il lavoro esterno sarà banalmente nullo, dato che non c'è spostamento. Anche qui trascuriamo il lavoro di deformazione dovuto al taglio, facendo l'ipotesi di trave snella, quindi si ottiene

$$\delta L_d = \int_0^l \frac{M'_x M_x}{EJ_x} dz = \frac{1}{EJ_x} \int_{\frac{l}{2}}^l \left[Fz - X\left(z - \frac{l}{2}\right) \right] \left(-z + \frac{l}{2} \right) dz = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{Xl^2}{4} z + \left(\frac{Fl}{2} - Xl \right) \frac{z^2}{2} + (X - F) \frac{z^3}{3} \right]_{\frac{l}{2}}^l = 0$$

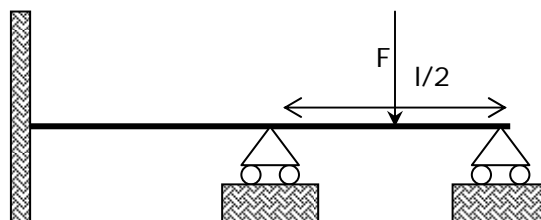
$$X = \frac{5}{2} F$$

Dato che nel SF la trave ha azioni interne nulle per $0 < z < l/2$, possiamo traslare l'origine dell'asse z in mezzeria.

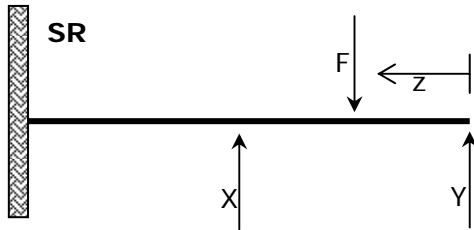
Esempio 3

Calcolo di due reazioni iperstatiche.

Vogliamo calcolare le reazioni iperstatiche della seguente struttura:

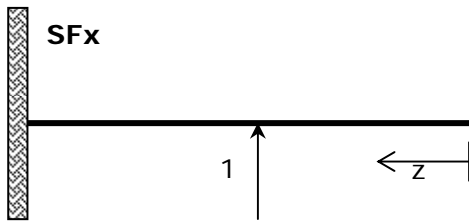


La struttura è due volte iperstatica, dovremo applicare due volte il PLVC per ottenere due equazioni nelle incognite X e Y , dovremo quindi costruire due sistemi fittizi distinti.



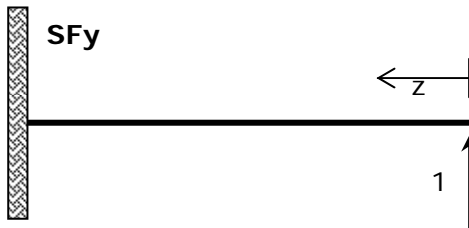
$$T_y = \begin{cases} -Y & 0 < z < \frac{l}{4} \\ F - Y & \frac{l}{4} < z < \frac{l}{2} \\ F - X - Y & \frac{l}{2} < z < l \end{cases}$$

$$M_x = \begin{cases} -Yz & 0 < z < \frac{l}{4} \\ -Yz + F\left(z - \frac{l}{4}\right) & \frac{l}{4} < z < \frac{l}{2} \\ -Yz + F\left(z - \frac{l}{4}\right) - X\left(z - \frac{l}{2}\right) & \frac{l}{2} < z < l \end{cases}$$



$$T_y = \begin{cases} 0 & 0 < z < \frac{l}{4} \\ 0 & \frac{l}{4} < z < \frac{l}{2} \\ -1 & \frac{l}{2} < z < l \end{cases}$$

$$M_x = \begin{cases} 0 & 0 < z < \frac{l}{4} \\ 0 & \frac{l}{4} < z < \frac{l}{2} \\ -1 \cdot \left(z - \frac{l}{2}\right) & \frac{l}{2} < z < l \end{cases}$$



$$T_y = \begin{cases} -1 & 0 < z < \frac{l}{4} \\ -1 & \frac{l}{4} < z < \frac{l}{2} \\ -1 & \frac{l}{2} < z < l \end{cases}$$

$$M_x = \begin{cases} -1 \cdot z & 0 < z < \frac{l}{4} \\ -1 \cdot z & \frac{l}{4} < z < \frac{l}{2} \\ -1 \cdot z & \frac{l}{2} < z < l \end{cases}$$

Anche questa volta il lavoro esterno sarà nullo, dato che non c'è spostamento. Anche qui trascuriamo il lavoro di deformazione dovuto al taglio, facendo l'ipotesi di trave snella, quindi si ottiene per il primo sistema fittizio:

$$\delta L_{dX} = \int_0^l \frac{M'_x M_x}{EJ_x} dz = \frac{1}{EJ_x} \int_{\frac{l}{2}}^l \left[-Yz + F\left(z - \frac{l}{4}\right) - X\left(z - \frac{l}{2}\right) \right] \left(-z + \frac{l}{2} \right) dz = 0$$

Risolto l'integrale si ottiene un'equazione nelle due variabili X e Y, questa va messa a sistema con l'equazione ottenuta dal secondo integrale:

$$\delta L_{dY} = \int_0^l \frac{M'_x M_x}{EJ_x} dz = \int_0^{\frac{l}{4}} (-z)(-Yz) dz + \int_{\frac{l}{4}}^{\frac{l}{2}} (-z) \left[-Yz + F\left(z - \frac{l}{4}\right) \right] dz + \int_{\frac{l}{2}}^l (-z) \left[-Yz + F\left(z - \frac{l}{4}\right) - X\left(z - \frac{l}{2}\right) \right] dz = 0$$

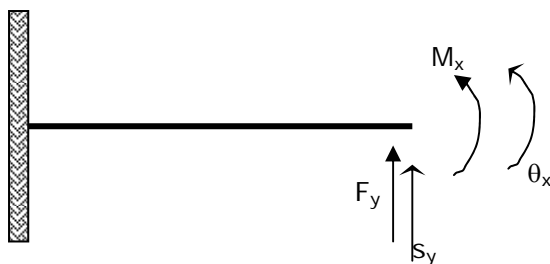
Il sistema tra le due equazioni ci dà i valori delle due iperstatiche.

Le due incognite iperstatiche non sono disaccoppiate perché entrambe generano una flessione, quindi si scambiano del lavoro. Per questo sono presenti entrambe in ciascuna equazione di congruenza.

Matrici di Rigidezza e Flessibilità

IL PLVC ci consente anche di determinare le matrici di rigidezza e flessibilità, che legano forze e spostamenti in un punto della trave.

Definendo un punto della trave e le sue componenti di spostamento, la matrice di rigidezza lega s_y e θ_x a F_y e M_x :



$$\begin{Bmatrix} F_y \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_y \\ \theta_x \end{Bmatrix}$$

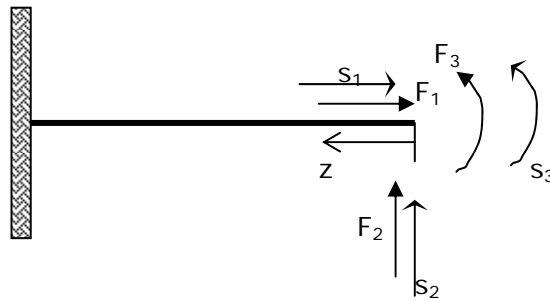
la matrice di rigidezza è simmetrica, ciò porta a capire che $k_{12}=k_{21}$.

In realtà quello che sappiamo calcolare non è la matrice di rigidezza, ma la sua inversa, la matrice di flessibilità, perché sappiamo determinare gli spostamenti a partire dalle azioni interne.

$$\begin{Bmatrix} s_y \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_y \\ M_x \end{Bmatrix}$$

Anche la matrice di flessibilità è una matrice simmetrica con $c_{12}=c_{21}$.

Determiniamo i coefficienti della matrice di flessibilità nel caso di una trave lunga l incastrata per un suo estremo:



Da notare che s_3 e F_3 sono una rotazione ed un momento. Avendo tre spostamenti e tre forze la matrice di flessibilità sarà:

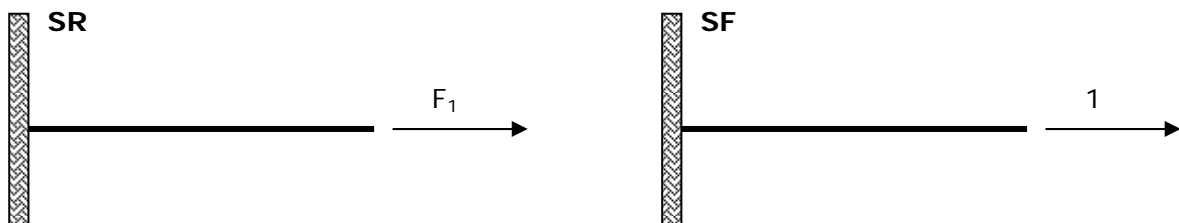
$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Adottando il nostro solito sistema di convenzione dei segni, abbiamo che

$$\begin{aligned} F_1 &\Rightarrow T_z = F_1 \\ F_2 &\Rightarrow T_y = -F_2 \quad M_x = -F_2 z \\ F_3 &\Rightarrow M_x = -F_3 \end{aligned}$$

Andiamo a determinare i coefficienti della matrice $[C]$:

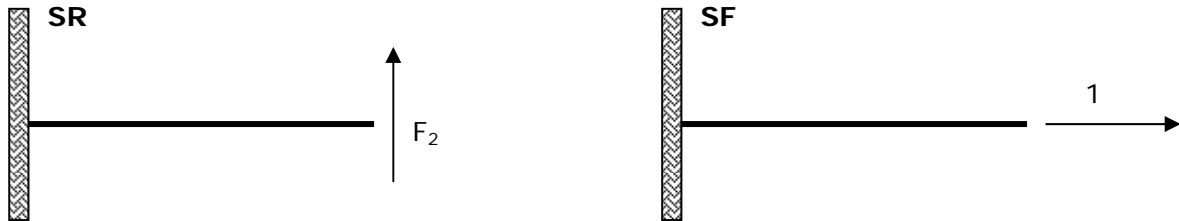
il **coefficiente** c_{11} è lo spostamento causato dalla forza F_1 , vuol dire che il sistema fittizio è dato da una forza unitaria nella direzione di F_1 , il sistema reale è quello che causa la forza, quindi è sempre F_1 :



$$\delta L_e = 1 \cdot s_1 \quad \delta L_d = \int_0^l \frac{1 \cdot F_1}{EA} dz = \frac{F_1 l}{EA} \Rightarrow s_1 = \frac{l}{EA} F_1$$

$$c_{11} = \frac{l}{EA}$$

Allo stesso modo il **coefficiente** c_{12} è lo spostamento di s_1 per F_2 , il sistema fittizio è sempre 1 con direzione F_1 , il sistema reale è F_2 :



$$\delta L_e = 1 \cdot s_1 \quad \delta L_d = \int_0^l \frac{1 \cdot 0}{EA} dz = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 0 \cdot F_2$$

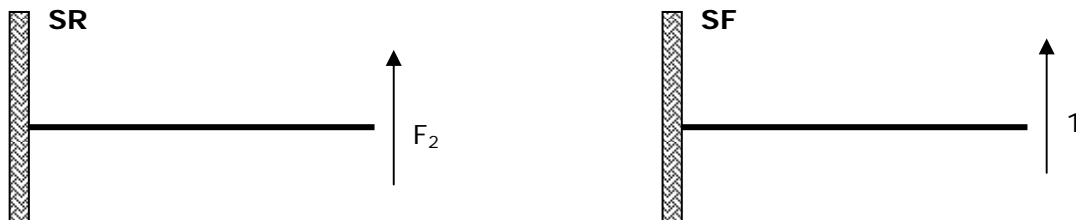
$$c_{12} = 0$$

sappiamo che la matrice è simmetrica quindi anche $c_{21}=0$.

Con il medesimo ragionamento si vede che, essendo F_3 discorde a F_1 , e di conseguenza al suo sistema fittizio, anche c_{13} e c_{31} saranno nulli:

$$c_{13} = c_{31} = 0$$

Il coefficiente c_{22} è spostamento in direzione y s_2 causato da F_2 , si ottiene:



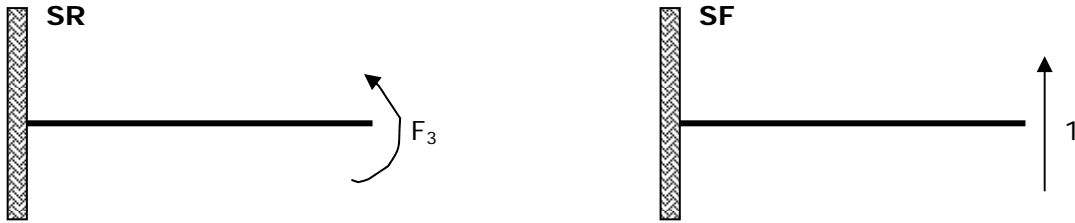
$$\delta L_e = 1 \cdot s_2 \quad \delta L_d = \int_0^l \left(\frac{-F_2(-1)}{GA_y^*} + \frac{(-F_2 z)(-z)}{EJ_x} \right) dz = 0$$

se l'asta è abbastanza snella possiamo eliminare il primo addendo dell'integrale, ed avere

$$\delta L_d = \left[\frac{1}{3} \frac{F_2 z^3}{EJ_x} \right]_0^l = \frac{1}{3} \frac{F_2 l^3}{EJ_x} \quad \Rightarrow \quad s_2 = \frac{l^3}{3EJ_x} F_2$$

$$c_{22} = \frac{l^3}{3EJ_x}$$

Per il coefficiente c_{23} si ha:

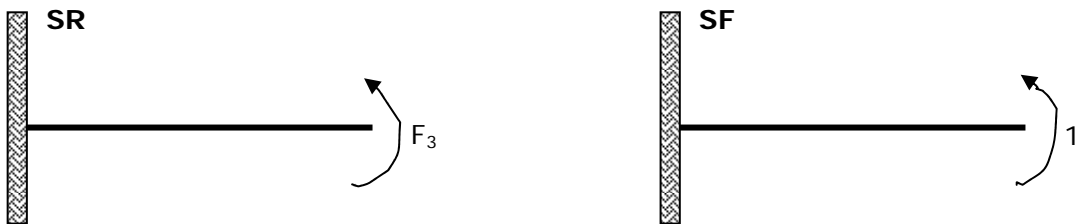


$$\delta L_e = 1 \cdot s_2 \quad \delta L_d = \int_0^l \frac{-F_3 \cdot (-z)}{EJ_x} dz = \frac{F_3 l^2}{2EJ_x} \Rightarrow s_2 = \frac{l^2}{2EJ_x} F_3$$

$$c_{23} = \frac{l^2}{2EJ_x}$$

Per la simmetria della matrice possiamo dire che anche $c_{32} = \frac{l^2}{2EJ_x}$.

Infine andiamo a calcolare il coefficiente c_{33} :



$$\delta L_e = 1 \cdot s_3 \quad \delta L_d = \int_0^l \frac{-F_3 \cdot (-1)}{EJ_x} dz = \frac{F_3 l}{EJ_x} \Rightarrow s_3 = \frac{l}{EJ_x} F_3$$

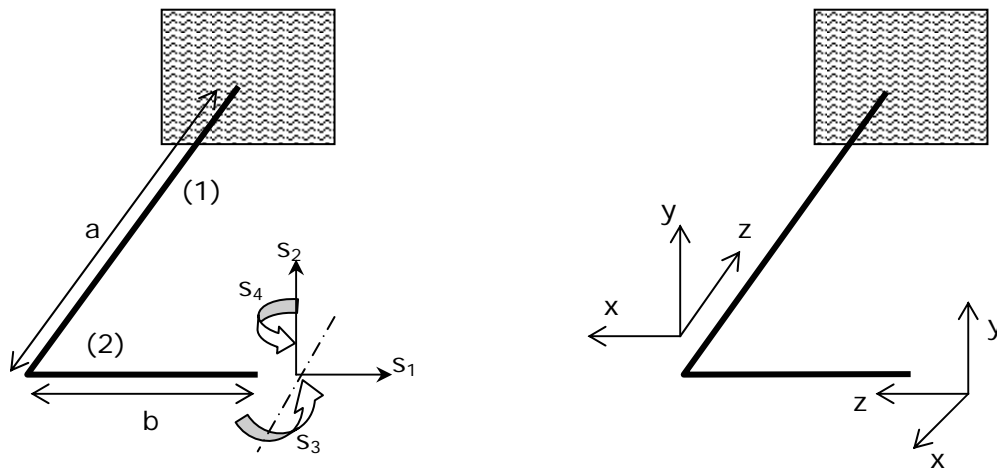
$$c_{33} = \frac{l}{EJ_x}$$

la matrice di flessibilità sarà,

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EJ_x} & \frac{l^2}{2EJ_x} \\ 0 & \frac{l^2}{2EJ_x} & \frac{l}{EJ_x} \end{bmatrix}$$

Non è detto che tutti i termini della matrice siano positivi, questo dipende dalla scelta degli assi di riferimento. Certamente sono positivi quelli della diagonale principale.

Guardiamo un altro esempio di costruzione della matrice di flessibilità. Supponiamo di avere un sistema costituito da due aste, così fatto:

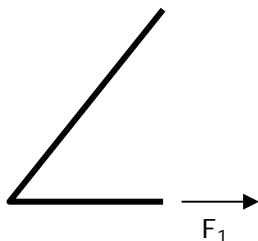


Vogliamo calcolare la matrice di flessibilità dell'estremo libero, dove agiscono 4 forze che producono gli spostamenti segnati in figura, da questo possiamo capire che la matrice di flessibilità sarà:

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix}$$

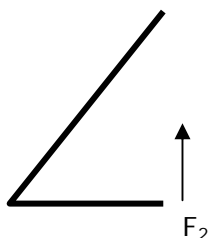
Con i sistemi di riferimento scelti, andiamo a trovare le azioni interne suddividendole sulle due aste.

F_1 :

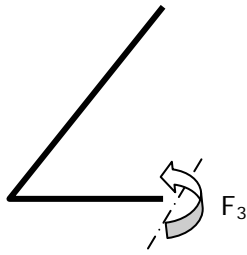


$$\begin{aligned} (2) \quad T_z &= F_1 \\ (1) \quad T_x &= F_1 \quad M_y = -F_1 z \end{aligned}$$

F_2 :

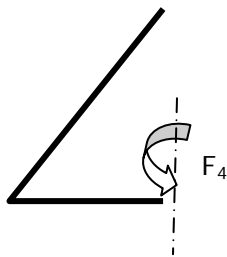


$$\begin{aligned} (2) \quad T_y &= -F_2 \quad M_x = -F_2 z \\ (1) \quad T_y &= -F_2 \quad M_x = -F_2 z \quad M_z = F_2 b \end{aligned}$$

F₃:

$$(2) \quad M_x = -F_3$$

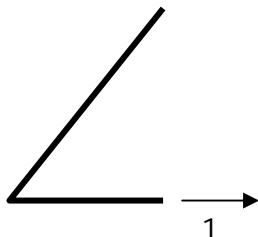
$$(1) \quad M_z = F_3$$

F₄:

$$(2) \quad M_y = -F_4$$

$$(1) \quad M_y = -F_4$$

Andiamo a calcolare i coefficienti c_{ij} della matrice di flessibilità, costruiamo il sistema fittizio 1:

SF₁:

$$(2) \quad T'_z = 1$$

$$(1) \quad T'_x = 1 \quad M'_y = -z$$

Il **coefficiente** c_{11} è dato da,

$$\delta L_e = 1 \cdot s_1 \quad \delta l_d = \int_0^b \frac{T'_z T_z}{EA} dz + \int_0^a \left(\frac{T'_x T_x}{GA_x^*} + \frac{M'_y M_y}{EJ_y} \right) dz = \int_0^b \frac{F_1}{EA} dz + \int_0^a \frac{F_1 z^2}{EJ_y} dz = \left(\frac{b}{EA} + \frac{a^3}{3EJ_y} \right) F_1$$

Si fa l'ipotesi di asta snella e si trascura il termine.

$$c_{11} = \frac{b}{EA} + \frac{a^3}{3EJ_y}$$

Il **coefficiente** c_{12} si ottiene facendo lavorare il SF₁ con il sistema reale F₂, ma si nota facilmente che i due sistemi sono disaccoppiati, quindi tutti i prodotti all'interno dell'integrale risultano nulli, quindi possiamo dire che

$$c_{12} = c_{21} = 0$$

Allo stesso modo, per trovare il **coefficiente** c_{13} , si vede facilmente che il sistema fittizio SF_1 è disaccoppiato anche con il sistema reale F_3 , quindi

$$c_{13} = c_{31} = 0$$

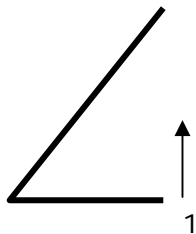
Andiamo a calcolare il **coefficiente** c_{14} , si ha:

$$\delta L_e = 1 \cdot s_1 \quad \delta l_d = \int_0^a \frac{M'_y M_y}{EJ_y} dz = \int_0^a \frac{F_4 z}{EJ_y} dz = \frac{F_4 a^2}{2EJ_y} \Rightarrow s_1 = \frac{a^2}{2EJ_y} F_4$$

$$c_{14} = c_{41} = \frac{a^2}{2EJ_y}$$

Adesso ci costruiamo il sistema fittizio SF_2 , che sarà fatto,

SF_2 :



$$(2) \quad T'_y = -1 \quad M'_x = -z$$

$$(1) \quad T'_y = -1 \quad M'_x = -z \quad M'_z = b$$

Il **coefficiente** c_{22} sarà dato da:

$$\delta L_e = 1 \cdot s_2 \quad \delta l_d = \int_0^b \left(\frac{F_2}{GA_y^*} + \frac{F_2 z^2}{EJ_x} \right) dz + \int_0^a \left(\frac{F_2}{GA_y^*} + \frac{F_2 z^2}{EJ_x} + \frac{b^2}{GJ_t} \right) dz = \left(\frac{a^3 + b^3}{3EJ_x} + \frac{ab^2}{GJ_t} \right) F_2$$

$$c_{22} = \frac{a^3 + b^3}{3EJ_x} + \frac{ab^2}{GJ_t}$$

Il **coefficiente** c_{23} si ottiene facendo lavorare il sistema reale SF_2 per il sistema reale F_3 , si ha

$$\delta L_e = 1 \cdot s_2 \quad \delta l_d = \int_0^b \frac{F_3 z}{EJ_x} dz + \int_0^a \frac{F_3 b}{GJ_t} dz = \left(\frac{b^2}{2EJ_x} + \frac{ab}{GJ_t} \right) F_3$$

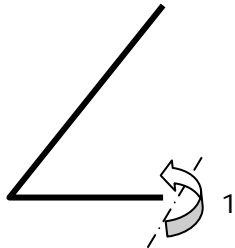
$$c_{23} = c_{32} = \frac{b^2}{2EJ_x} + \frac{ab}{GJ_t}$$

Il **coefficiente** c_{24} si trova facendo lavorare SF_2 per F_4 , ma i due sistemi sono disaccoppiati, quindi

$$c_{24} = c_{42} = 0$$

Il sistema fittizio SF_3 sarà:

SF_3 :



$$(2) \quad M'_x = -1$$

$$(1) \quad M'_z = 1$$

Il **coefficiente** c_{33} sarà,

$$\delta L_e = 1 \cdot s_3 \quad \delta l_d = \int_0^b \frac{F_3}{EJ_x} dz + \int_0^a \frac{F_3}{GJ_t} dz = \left(\frac{b}{EJ_x} + \frac{a}{GJ_t} \right) F_3$$

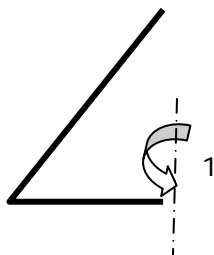
$$c_{33} = \frac{b}{EJ_x} + \frac{a}{GJ_t}$$

Il **coefficiente** c_{34} si ottiene dal sistema fittizio SF_3 per il sistema reale F_4 , ma i due sistemi sopracitati sono disaccoppiati quindi il coefficiente sarà nullo:

$$c_{34} = c_{43} = 0$$

Infine dobbiamo costruire il sistema fittizio SF_4 , che sarà

SF_4 :



$$(2) \quad M'_y = -1$$

$$(1) \quad M'_y = -1$$

Il **coefficiente** c_{44} sarà dato da:

$$\delta L_e = 1 \cdot s_4 \quad \delta l_d = \int_0^b \frac{F_4}{EJ_y} dz + \int_0^a \frac{F_4}{EJ_y} dz = \frac{a+b}{EJ_y} F_4$$

$$c_{44} = \frac{a+b}{EJ_y}$$

Alla fine possiamo scrivere la matrice di flessibilità cercata:

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{b}{EA} + \frac{a^3}{3EJ_y} & 0 & 0 & \frac{a^2}{2EJ_y} \\ 0 & \frac{a^3 + b^3}{3EJ_x} + \frac{ab^2}{GJ_t} & \frac{b^2}{2EJ_x} + \frac{ab}{GJ_t} & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{2EJ_x} + \frac{ab}{GJ_t} & \frac{b}{EJ_x} + \frac{a}{GJ_t} & 0 \\ \frac{a^2}{2EJ_y} & 0 & 0 & \frac{a+b}{EJ_y} \end{bmatrix}$$

Abbiamo visto fino a questo momento una struttura molto semplice che ha origine da una linea cioè dalla traslazione di un punto.

Parleremo di trave se la struttura lavora a trazione, taglio e flessione; parleremo di biella se la struttura lavora soltanto a trazione o compressione. Se estendiamo questi modelli nello spazio a due dimensioni otteniamo la piastra e la membrana.

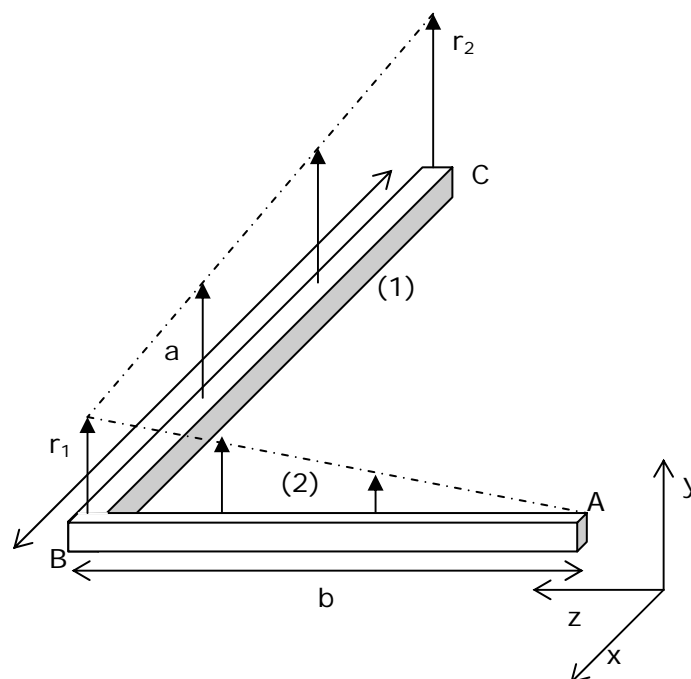
Trave \Rightarrow Piastra
1D 2D

Biella \Rightarrow Membrana
1D 2D

Se siamo in grado di calcolare il lavoro di deformazione per una struttura complessa allora saremo in grado anche di determinare la matrice di rigidezza.

Esempio 4

Vogliamo calcolare le azioni interne della struttura precedentemente vista, supponendo che su essa agiscono due carichi distribuiti.



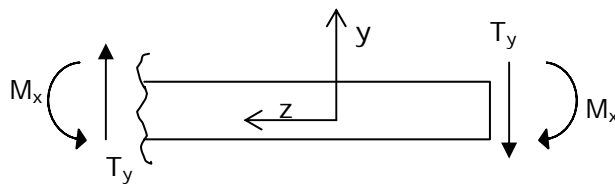
Come si vede dalla figura, sulla trave (2) agisce un carico distribuito che è pari a,

$$r_{y_2} = \frac{r_1}{b} z$$

mentre sull'asta (1) agisce il carico,

$$r_{y_1} = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{a} z$$

Andiamo a calcolare le azioni interne, partiamo dal vertice A e scorriamo lungo le due aste. Lungo l'asta (2) si ha,



$$T_{y_2} = \int -r_{y_2} dz = \int -\frac{r_1}{b} z dz = -\frac{r_1}{2b} z^2$$

$$M_{x_2} = \int T_y dz = \int -\frac{r_1}{2b} z^2 dz = -\frac{r_1}{6b} z^3$$

Sull'asta (1) abbiamo le azioni interne causate dal carico distribuito r_{y_1} , ma anche quelle trasmesse dalle risultanti delle azioni interne dell'asta (2) nell'incastro B. quindi possiamo, o calcolare le azioni interne di (1) considerando tutta la struttura, oppure applicare il Principio di Sovrapposizione degli Effetti.

Partiamo con il calcolarci le azioni interne di (1) senza pensare a cosa succede sull'asta (2):

$$T_{y_1} = \int -r_{y_1} dz = \int \left(-r_1 - \frac{r_2 - r_1}{a} z \right) dz = -r_1 z - \frac{r_2 - r_1}{2a} z^2$$

$$M_{x_1} = \int T_{y_1} dz = -\frac{r_1}{2} z^2 - \frac{r_2 - r_1}{6a} z^3$$

Ora andiamo a calcolare le azioni interne di (1) causate da (2). Possiamo trovare che,

$$T_{y_2}(b) = -\frac{r_1}{2} b \quad M_{x_2}(b) = -\frac{r_1}{6} b^2$$

quindi avrò,

$$T_{y_1}(0) = \frac{r_1}{2} b \Rightarrow T_{y_1}(z) = -\frac{r_1}{2} b \Rightarrow M_{x_1}(z) = -\frac{r_1}{2} bz$$

$$M_{x_2}(b) = -\frac{r_1}{6} b^2 \Rightarrow M_{x_1}(z) = \frac{r_1}{6} b^2$$

Le azioni interne dell'asta (1) totali saranno:

$$T_{y_1} = -\frac{r_2 - r_1}{2a} z^2 - r_1 z - \frac{r_1}{2} b$$

$$M_{x_1} = -\frac{r_2 - r_1}{6a} z^3 - \frac{r_1}{2} z^2 - \frac{r_1}{2} bz$$

$$M_{x_1} = \frac{r_1}{6} b^2$$

Matrice di Rigidezza

Riprendiamo la matrice di flessibilità trovata per l'estremo libero di un'asta incastrata. Essa era fatta nel seguente modo:

$$\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l^3}{3EJ_x} & \frac{l^2}{2EJ_x} \\ 0 & \frac{l^2}{2EJ_x} & \frac{l}{EJ_x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

possiamo dare una spiegazione geometrica alla matrice di flessibilità, pensando che per avere lo spostamento s_2 abbiamo bisogno di una forza positiva F_2 più un momento positivo F_3 , e via tutti gli altri.

Dalla matrice di flessibilità, facendone l'inversa si ricava la matrice di rigidezza, nel nostro caso sarà,

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_x}{l^3} & -\frac{6EJ_x}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ_x}{l^2} & \frac{4EJ_x}{l} \end{bmatrix}$$

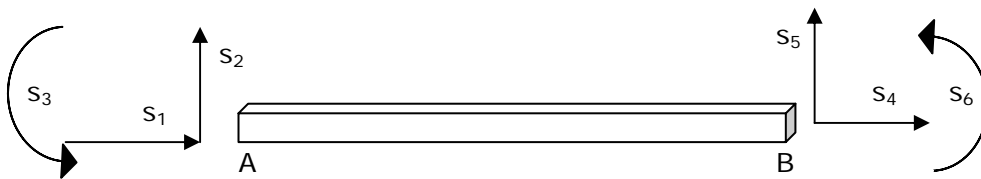
Anche qui possiamo trovare una spiegazione geometrica, ma al contrario di quanto fatto prima, dobbiamo imporre uno spostamento alla volta e considerare nulli tutti gli altri spostamenti per determinare le forze che nascono.

Matrice di rigidezza di una trave libera nel piano

La matrice di rigidezza di un'asta libera nel piano è una matrice 6x6 che può essere divisa in 4 parti distinte.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & I & & & II & \\ & & & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & & & & & \\ & & & III & & IV \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{Bmatrix}$$

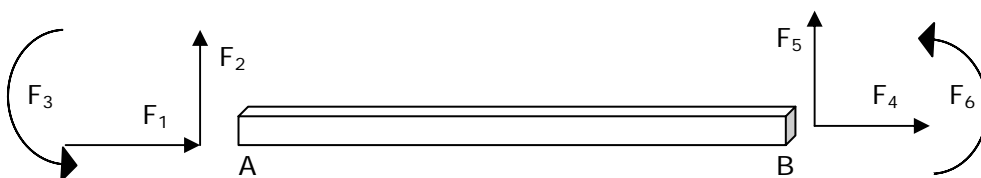
Il procedimento che abbiamo usato in precedenza per trovare la matrice di rigidezza per una trave incastrata, non possiamo più utilizzarlo poiché la nostra trave non ha più vincoli ed è quindi labile.



Allora attuiamo un trucco logico, infatti, pensiamo che la nostra trave sia incastrata per l'estremo A. Se così fosse ricadremmo nel caso precedente, di cui conosciamo già la matrice di rigidezza.

Ma questa coincide con il blocco IV della matrice totale, perché stiamo legando (s_4, s_5, s_6) a (F_4, F_5, F_6) .

Per determinare gli altri blocchi, imponiamo l'equilibrio alla trave:



$$F_1 = -F_4 = -\frac{EA}{l} s_4 \Rightarrow k_{14} = -\frac{EA}{l}$$

$$F_2 = -F_5 = -\frac{12EJ}{l^3} s_5 + \frac{6EJ}{l^2} s_6 \Rightarrow k_{25} = -\frac{12EJ}{l^3} \quad k_{26} = \frac{6EJ}{l^2}$$

$$F_3 = -F_6 - F_5 l = \frac{6EJ}{l^2} s_5 - \frac{4EJ}{l} s_6 - \frac{12EJ}{l^3} l s_5 + \frac{6EJ}{l^2} l s_6 = -\frac{6EJ}{l^2} s_5 + \frac{2EJ}{l} s_6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{35} = -\frac{6EJ}{l^2} \quad k_{36} = \frac{2EJ}{l}$$

Abbiamo così trovato i coefficienti del blocco II, per simmetria il blocco III deve essere uguale.

Non ci resta che trovare il blocco I, ma posso sempre incastrare l'estremo B e riottenere un'asta vincolata di cui conosco la matrice di rigidezza, con la sola differenza del verso della forza e dello spostamento orizzontali. Questa differenza mi porta al cambio di segno del coefficiente k_{56} .

Quindi la matrice di rigidezza completa sarà:

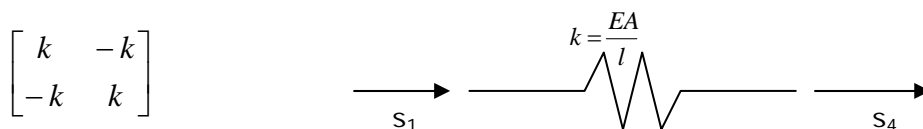
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \end{Bmatrix}$$

Matrice di rigidezza di una biella

La matrice di rigidezza di una biella la ricaviamo da quella della trave libera annullando tutti i termini dovuti alla flessione e al taglio.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_4 \end{Bmatrix}$$

questa matrice non è altro che quella di una molla dove $k = \frac{EA}{l}$, infatti



Quando si applica il metodo delle forze, se la struttura che si considera è iperstatica, le equazioni di equilibrio non sono in numero sufficiente, e la soluzione richiede anche l'impiego di equazioni di congruenza. Queste si ottengono in genere da formulazioni energetiche, quali il principio dei lavori virtuali complementari od il teorema di Menabrea, i quali consentono la ricerca della soluzione congruente fra le soluzioni equilibrate.

Ciò richiede o la formulazione di problemi variazionali vincolati, o espressioni delle soluzioni equilibrate che dipendono da parametri che non alterano l'equilibrio. Questi parametri sono le incognite iperstatiche che possono essere impiegate per soddisfare le condizioni di congruenza in problemi variazionali liberi.

Tuttavia, per le strutture complesse, oggi viene utilizzato quasi esclusivamente il metodo degli spostamenti, dato che consente formulazioni più agevolmente programmabili, e quindi un più facile impiego dei calcolatori. Vediamo di seguito l'utilizzo di tale metodo.

Metodo degli spostamenti

Tale metodo presenta il notevole vantaggio di poter essere facilmente automatizzabile e di non risentire del grado di iperstaticità della struttura in quanto la congruenza degli spostamenti è già contenuta all'interno della scrittura delle matrici di rigidezza delle singole travi.

L'ampliamento a sistemi spaziali non comporta variazioni di principio, ma solo la riscrittura delle matrici di rigidezza e del vettore coordinate libere inserendo i termini qui trascurati.

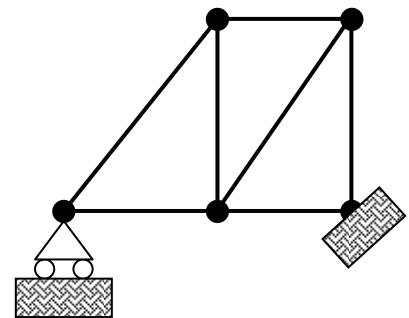
Consideriamo un sistema costituito da un certo numero di travi, e supponiamo ancora di avere a disposizione la matrice di rigidezza di tutte le travi, per ogni trave possiamo scrivere:

$$\{\bar{F}\}_i = [\bar{K}]_i \{\bar{u}\}_i$$

dove $i=1\dots n=nr$ di travi, la barra superiore indica che siamo nel sistema di riferimento locale.

La matrice K ha dimensioni 6×6 e quindi i vettori F ed u sono 6×1 . Il vettore u rappresenta gli spostamenti degli estremi della trave organizzati nella seguente maniera:

$$\{\bar{u}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{1x} \\ \bar{u}_{1y} \\ \bar{u}_{1\theta} \\ \bar{u}_{2x} \\ \bar{u}_{2y} \\ \bar{u}_{2\theta} \end{Bmatrix}$$



u_{1y} è lo spostamento dell'estremo 1 in direzione y .

La prima operazione da eseguire è la rotazione del sistema per mettersi nel sistema di riferimento globale. Tale operazione viene effettuata tramite la relazione:

$$\{\bar{u}\}_i = [T]_i \{u\}_i \quad \text{dove: } [T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e α è l'angolo formato tra l'asse x del sistema di riferimenti globale e l'asse x locale della trave (che consideriamo coincidente con l'asse baricentrico).

Si ha quindi (ricordando l'invarianza del lavoro di deformazione):

$$\delta L_d = \{\delta \bar{u}\}^T \{\bar{F}\} = \{\delta \bar{u}\}^T [\bar{K}] \{\bar{u}\} = \{\delta u\}^T [T]^T [\bar{K}] [T] \{u\}$$

$$\text{da cui: } [K] = [T]^T [\bar{K}] [T]$$

la K così ricavata è la matrice di rigidezza della trave i -esima portata nel sistema di riferimento globale.

L'ottenimento dell'equilibrio del sistema completo si ha "assemblando" i contributi delle singole travi. Il filo conduttore può essere trovato attraverso il principio dei lavori virtuali. Avendo già schematizzato le travi attraverso le singole matrici di rigidezza abbiamo già soddisfatto alla congruenza interna della struttura. Il sistema è perciò adesso schematizzabile attraverso dei 'nodi' su cui convergono le singole travi e di cui dobbiamo scrivere l'equilibrio. Il concetto di continuo è quindi già sparito (nel senso che tutte le integrazioni sono già contenute nella K). Possiamo quindi scrivere l'equilibrio eguagliando il lavoro di deformazione al lavoro delle forze esterne (PLV):

il lavoro di deformazione di una singola trave è:

$$\delta L_{di} = \{\delta u\}_i^T \{F\}_i = \{\delta u\}_i^T [K]_i \{u\}_i$$

Il lavoro di deformazione totale è la somma dei lavori delle singole travi e la matrice di rigidezza totale si scrive considerando il lavoro di deformazione di tutta la struttura. Si deve però prima riscrivere i vettori u_i e K_i ampliandoli alle dimensioni dei gradi di libertà del sistema per poter avere vettori e matrici tutti con le stesse dimensioni:

$$\delta L_d = \{\delta u\}^T \{F\} = \sum_i \{\delta u\}_i^T [K]_i \{u\}_i$$

da cui:

$$[K] = \sum_i [K]_i$$

tale lavoro deve essere eguagliato a quello delle forze esterne applicate ai nodi (notare che nell'assemblaggio le forze scambiate dalle travi, a due a due uguali, si elidono):

$$\delta L_e = \{\delta u\}^T \{F\}$$

dall'eguaglianza del lavoro interno ed esterno si ottiene la nota $F=Ku$.

Tornando alla descrizione del metodo, per ricavare la matrice di rigidezza del sistema completo si devono assemblare le matrici di rigidezza dei singoli elementi. Si deve definire cioè una matrice Ω_i che permette di trovare la posizione degli spostamenti locali u_i nel vettore degli spostamenti globali u . tale matrice in realtà contiene tantissimi zeri e pochi 1.

La matrice Ω_i ha dimensioni $6 \times (6n)$

$$\{u\}_i = [\Omega]_i \{u\}$$

la matrice Ω_i definisce anche la posizione delle forze della trave i -esima rispetto al vettore di tutte le forze applicate. La matrice di rigidezza nel sistema globale assemblata dalle matrici delle singole aste si ricava così:

$$\delta l_d = \sum_i \{\delta u\}_i^T [K]_i \{u\}_i = \sum_i \{\delta u\}^T [\Omega]_i^T [K]_i [\Omega]_i \{u\} = \{\delta u\}^T \left(\sum_i [\Omega]_i^T [K]_i [\Omega]_i \right) \{u\}$$

$$[K] = \sum_i [\Omega]_i^T [K]_i [\Omega]_i$$

è possibile ora scrivere l'equazione che governa l'equilibrio del sistema (come già visto):

$$\{F\} = [K]\{u\}$$

dove F sono a questo punto le forze esterne applicate a i nodi delle travi e u è il vettore contenente tutti gli spostamenti dei nodi. La risoluzione non può però essere ancora effettuata in quanto la matrice K così definita è labile, dato che non sono ancora stati inseriti i vincoli esterni.

Tali vincoli si concretizzano nel dire che alcuni spostamenti (vincoli bilateri) sono impediti. Questo equivale ad eliminare dalla matrice K e dai vettori F ed u le righe e le colonne corrispondenti a tali spostamenti. Il sistema può essere così risolto essendo ora la matrice K invertibile.

In realtà possono anche essere interessanti le reazioni vincolari. Per tale motivo si procede nel seguente modo:

si divide il vettore degli spostamenti u in una parte u_L incognita e una parte u_v nota che rappresenta gli spostamenti dei vincoli:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_v \\ u_L \end{Bmatrix}$$

allo stesso modo si divide il vettore F in forze applicate dall'esterno F_e (che sono note) e reazioni vincolari F_v (incognite):

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_v \\ F_e \end{Bmatrix}$$

così facendo il legame forze-spostamenti viene riscritto:

$$\begin{Bmatrix} F_v \\ F_e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{vv} & K_{vL} \\ K_{vL} & K_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_v \\ u_L \end{Bmatrix}$$

dalla seconda riga si ha:

$$\{F_e\} = [K_{vL}]\{u_v\} + [K_{LL}]\{u_L\}$$

in cui la K_{LL} è ora invertibile e gli u_v sono noti. Per cui:

$$\{u_L\} = [K_{LL}]^{-1}(\{F_e\} - [K_{vL}]\{u_v\})$$

che ci dà gli spostamenti incogniti della struttura con cui calcoliamo le reazioni vincolari:

$$\{F_v\} = [K_{vv}]\{u_v\} + [K_{vL}]\{u_L\}$$

Ovviamente il sistema di schematizzazione diventa potente nel momento in cui si ha a che fare con sistemi di travi in cui si vogliono ripetere i calcoli variando, ad esempio, le geometrie del sistema. All'interno della matrice di rigidezza della singola trave sono contenuti tutti i contributi considerati interessanti per lo sviluppo del calcolo (deformazioni flessionali, torsionali, a taglio ed assiali). L'introduzione di tali contributi non modifica quindi il procedimento di assemblaggio ma solamente il calcolo della singola matrice K . Nel caso si utilizzino ad esempio delle bielle o delle travi nello spazio, il metodo rimane inalterato a patto di valutare caso per caso l'espressione della K del singolo elemento e della matrice di rotazione T .¹

Nel caso di un modello a travi, tale metodo coincide con il calcolo agli elementi finiti; tale metodo, inoltre, tenendo conto anche del lavoro delle forze di inerzia:

$$\delta L_i = \{\delta u\}^T [M] \left\{ \ddot{u} \right\}$$

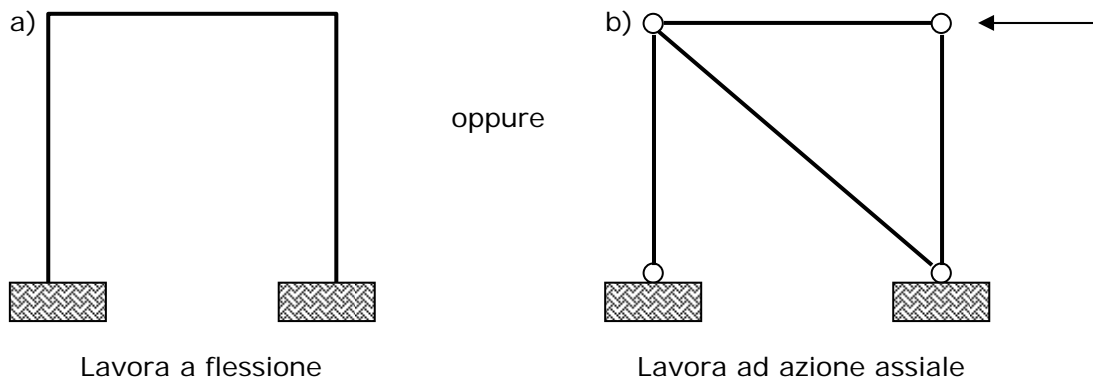
¹ Si rimanda alla fine degli appunti per due esempi sul metodo degli spostamenti.

consente di passare immediatamente dal problema statico al problema dinamico:

$$\{\delta u\}^T \left([M] \ddot{u} + [K] u \right) = \{\delta u\}^T \{F\}$$

Le strutture composte esclusivamente da bielle vengono chiamate travature reticolari: si tratta di strutture altamente efficienti (a pari rigidità pesano meno), molto utilizzate in passato nelle costruzioni aeronautiche e civili in genere; la loro scomparsa, in campo aeronautico, è stata dettata dall'avvento dei pannelli integrati (che racchiudono già le travi).

Il motivo della loro efficienza è facilmente intuibile; supponiamo di voler costruire un portale:



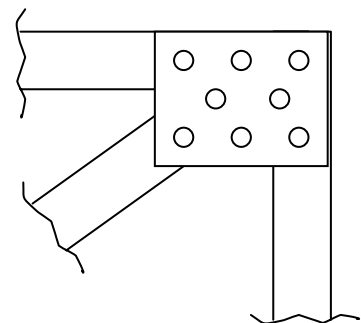
Poiché la rigidità flessionale di una trave è molto più bassa della rigidità assiale,

$$\frac{EA}{l} \gg \frac{12EJ}{l^3} \Rightarrow \text{la struttura b) è estremamente più efficiente}$$

Nella realtà, però, nelle giunzioni non vengono usate cerniere, bensì fazzoletti imbullonati.

Se però idealmente tagliamo i fazzoletti e inseriamo delle cerniere e la struttura rimane rigida, non collassa, allora si è sicuri che la struttura reale si comporterà come una travatura reticolare; questo è dovuto al fatto che, siccome la rigidità assiale è molto maggiore di quella flessionale, le azioni flettenti non fanno in tempo ad intervenire, sono trascurabili. Se però la struttura, munita idealmente di cerniere, diventa un cinematismo, significa che la struttura non può sorreggersi senza la flessione e quindi è inefficiente.

Il criterio qui sommariamente descritto rappresenta uno strumento pratico di notevole importanza per distinguere una buona struttura da una mediocre.



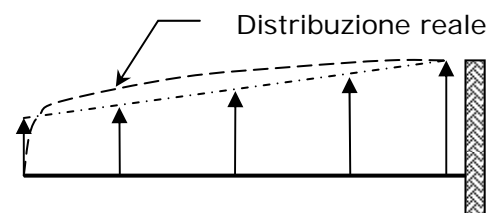
Le strutture Aeronautiche

Introduzione

Da un punto di vista strutturale, l'ala e la fusoliera sono considerate travi. La semiala, in quanto "mensola" incastrata è una struttura isostatica, e ciò pone il vantaggio di poter ricavare tutte le azioni interne, sezione per sezione, senza aver posto alcun vincolo sulla forma della sezione (il profilo alare). Noti gli sforzi in ciascuna sezione, si può procedere al dimensionamento della stessa in funzione dell'apertura.

Si può ritenere, con buona approssimazione, che la portanza sia una forza distribuita uniformemente sulla superficie. Il massimo del momento flettente è ovviamente alla radice.

In generale, queste forze aerodinamiche generano anche un momento torcente, il che pone il problema di stabilire rispetto a quale asse.



In fase di progetto, non avendo ancora definito la sezione, bisogna riferirsi a un sistema d'assi qualsiasi (gli assi principali d'inerzia non sono ancora stati definiti), convenzionali.

La torsione provoca una rotazione cabrante della sezione (il centro aerodinamico è avanzato in corda rispetto al centro di taglio), maggiore via via che si procede in apertura.

Il fenomeno pone dei problemi notevoli: una perturbazione (raffica) può aumentare la portanza, aumentando la torsione e così via, tanto che, se la velocità è superiore ad una velocità critica, si può avere divergenza torsionale (è una instabilità statica caratterizzata dal fatto che il momento stabilizzante è inferiore al momento destabilizzante). Tale problematica è scritta storicamente passando dall'ala biplana (con elevatissima rigidità torsionale) all'ala monoplana.

Problemi simili sono posti dall'instabilità dinamica (flutter): a velocità superiori di quella critica la struttura oscillante (l'ala) assorbe energia continuamente dal fluido (le forze aerodinamiche non sono conservative e quindi il lavoro lungo una linea chiusa è diverso da zero) e si hanno oscillazioni divergenti, fino alla perdita delle ali.

A velocità inferiori a quella critica, l'effetto smorzante generato dal materiale è sufficiente ad attenuare le oscillazioni.²

Tutte le manovre simmetriche (virate corrette, richiamate, ecc.) coinvolgono una distribuzione di carico tale e quale a quella già vista, semplicemente moltiplicata per un certo fattore (fattore di carico).

Nel caso di manovre non simmetriche, bisogna tenere conto anche delle forze di inerzia e della distribuzione asimmetrica della portanza. La struttura viene

² Si osservi che gli effetti torsionali non sono solo relativi all'ala. La presenza di piani di coda, infatti, può produrre torsione sulla fusoliera.

progettata pensando alle condizioni di carico più critiche (virate, rollio, richiamate strette, raffiche, atterraggio, ecc.); in genere, i progettisti prendono in considerazione diverse decine di condizioni di carico.

L'ala biplana è un ottimo esempio di efficienza strutturale aeronautica. Coniuga infatti un'ottima rigidezza torsionale e flessionale (la sezione si estende praticamente dalla prima ala alla seconda) con una grande leggerezza.

L'evoluzione non è stata quindi dettata da motivi strutturali, bensì dall'aumento della velocità, il che significa ricerca di minori resistenze parassite ma anche molto più carico alare ($\frac{Q}{S} \propto V^2$).

Questo fatto ha obbligato i progettisti a ricercare nuove soluzioni costruttive e nuovi materiali. L'aumento di velocità è stato a sua volta reso possibile dal miglioramento dei propulsori.

Il problema, passando all'ala monoplana, è stato quello di ottenere comunque una buona rigidezza torsionale; in parte si sfruttava la rigidezza torsionale dei longheroni, in parte altre soluzioni: ad esempio porre al posto delle centine tradizionali degli elementi a $\pm 45^\circ$ (traliccio geodetico).

Più avanti, un contributo sostanziale alla rigidezza torsionale è stato fornito dal rivestimento alare (i primi tempi in legno compensato con fibre a $\pm 45^\circ$).

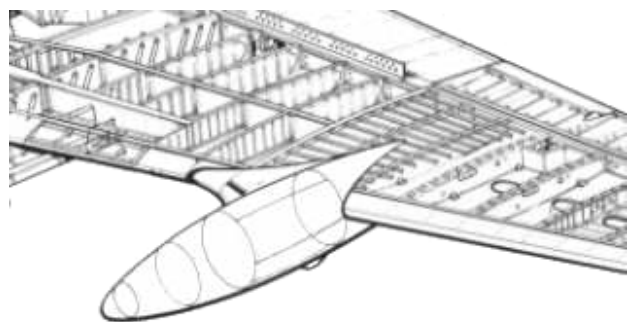
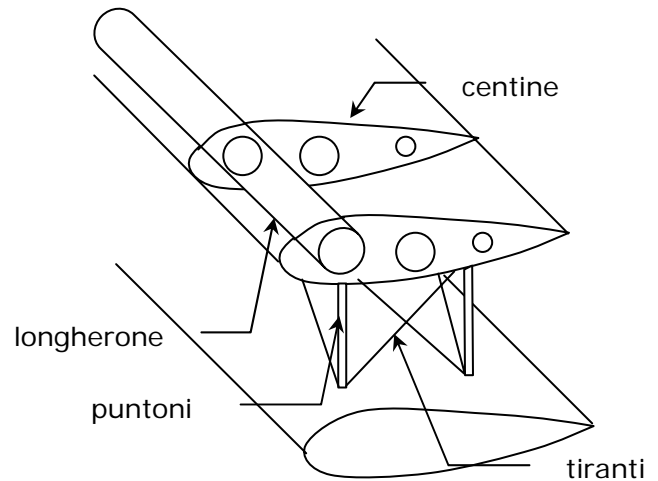
Se il rivestimento è di alluminio, il rivestimento dà un contributo sostanziale anche alla flessione, creando così una struttura a semiguscio (con semicentine) il longherone viene a scomparire del tutto e non vi è più separazione tra le parti aerodinamiche e quelle strutturali.

Le strutture a guscio/semiguscio sono costituite da tre elementi fondamentali: i pannelli, i correnti ed i diaframmi (le centine).

I pannelli insieme ai correnti costituiscono i cosiddetti pannelli nervati (irrigiditi). Tali elementi sopportano molto bene gli sforzi σ_z

(momento flettente); le τ sono soprattutto sopportate dai pannelli.

La funzione dei correnti è quella di rendere stabile la struttura. È bene osservare che il grosso del peso della struttura (il 70÷80%) è rappresentato dai pannelli.



I diaframmi (le centine) hanno tre funzioni fondamentali:

1. Introducono i carichi concentrati, trasversali, nella struttura (i pannelli).
2. Mantengono la forma della sezione; il numero delle centine deve essere tale da limitare oltre una certa soglia (stabilità degli aerodinamici) la flessione della lamiera tra una centina e l'altra (e quindi limitare la deformazione del profilo alare).
3. Creare dei supporti per i correnti: il carico critico, infatti, per i correnti caricati di punta a seguito della flessione aumenta diminuendo la distanza fra le centine (gli appoggi).

Dove i carichi sono maggiori, si hanno diaframmi di forza più robusti.

Nei veicoli spaziali la parte fondamentale non è il rivestimento ma la struttura interna. Le verifiche sperimentali sono spesso impossibili quindi il calcolo strutturale assume un'importanza maggiore.

Negli elicotteri, invece, la parte fondamentale è il rotore che deve fornire una forza in grado di equilibrare il peso del velivolo. Un elemento molto importante è il riduttore che trasforma i 3000 giri del rotore in 300 giri per l'elica. Inoltre, l'elicottero deve poter compiere una manovra di autorotazione, quindi all'ultimo stadio del riduttore si inserisce una cerniera libera per consentire la manovra anche in condizioni di bloccaggio.

L'elicottero presenta molte ordinate e aperture di grandi dimensioni, le pale sono in fibra di vetro, e non in carbonio, perché altrimenti sarebbero troppo leggere e renderebbero inefficace l'autorotazione. Le fibre di vetro non hanno problemi di fatica a trazione quindi sono la scelta migliore per le pale dell'elicottero.

È pratica comune, nella fase iniziale di progetto, ricorrere a metodi semplici, come lo schema a travi, e solo a progetto ultimato si procede a raffinare il dimensionamento degli elementi strutturali mediante il metodo degli elementi finiti (non ha alcun senso impiegare nella fase preliminare del progetto in quanto richiede già la conoscenza delle caratteristiche solventi della struttura).

Il metodo agli elementi finiti consente un calcolo più preciso, e quindi permette di ridurre i margini di sicurezza e di realizzare strutture più leggere e più economiche. Allo stesso tempo, però, i rischi aumentano: realizzando un progetto solo con questo metodo si rischia di commettere grossi errori.

Per questi motivi, nonostante l'indubbio salto in avanti nelle capacità di calcolo dei calcolatori, lo schema a travi riveste ancora un'importanza fondamentale; le travi maggiormente impiegate in campo aeronautico (travi a semiguscio) sono caratterizzate da un rapporto tra il diametro di trave e spessore superiore a 1000, che, come si suol dire, hanno una sezione estremamente sottile.

Nella deformazione di queste travi, inoltre, la torsione (come abbiamo già visto) gioca un ruolo fondamentale.

Equazione dei flussi sorgenti

Nello schema a travi avevamo determinato che la σ poteva essere espressa in funzione di M_x , M_y e T_z , come:

$$\sigma = \frac{T_z}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x$$

ma ancora non abbiamo detto niente sulle τ .

Se andiamo a costruirci l'equilibrio alla traslazione del cubetto infinitesimo di lati dx , dy e dz , otteniamo le equazioni indefinite di equilibrio:

$$\sigma_{ik/k} + F_i = 0$$

queste relazioni valgono anche all'interno della trave.

Supponendo che le forze di volume sono trascurabili, cioè che il contorno è scarico, possiamo scrivere che,

$$\sigma_{ik/k} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx/x} + \sigma_{xy/y} + \sigma_{xz/z} = 0 \\ \sigma_{yx/x} + \sigma_{yy/y} + \sigma_{yz/z} = 0 \\ \sigma_{zx/x} + \sigma_{zy/y} + \sigma_{zz/z} = 0 \end{cases}$$

notiamo che le σ e le τ sono disaccoppiate, perché il materiale è isotropo.

Lo stato di sforzo è dato solo dalle componenti agenti sul piano della sezione:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0 \quad \sigma_{xy} = 0 \\ \sigma_{zz} = \sigma \quad \sigma_{zx} = \tau_x \quad \sigma_{zy} = \tau_y \end{aligned}$$

le equazioni indefinite di equilibrio diventano,

$$\begin{cases} \tau_{x/z} = 0 \\ \tau_{y/z} = 0 \\ \tau_{x/x} + \tau_{y/y} + \sigma_{/z} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \bar{\tau}_{/z} = 0 \\ \text{div } \bar{\tau} + \sigma_{/z} = 0 \end{cases}$$

a queste equazioni bisogna aggiungere l'equazione di equilibrio al contorno della sezione, per esprimere il fatto che le forze esterne applicate sulla superficie laterale della trave sono nulle, $\bar{\tau} \cdot \bar{n} = 0$.

Le prime due equazioni del sistema ci danno l'informazione che τ è costante lungo l'asse z . la terza equazione ci dice, invece, che la σ è lineare in z . E se il taglio è costante il momento flettente sarà lineare.

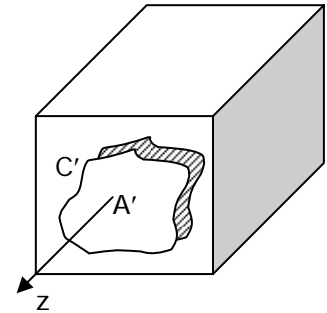
Andiamo a considerare una sezione di trave ed indichiamo una curva chiusa C' di area A' sulla sezione.

Vado ad integrare la terza equazione del sistema, si ottiene:

$$\int_{A'} \text{div } \bar{\tau} dA = - \int_{A'} \sigma_{/z} dA$$

per il teorema della divergenza, e scambiando l'operatore d'integrazione con quello di derivazione al secondo membro, si ha:

$$\int_{C'} \bar{\tau} \cdot \bar{n} dC = - \frac{\partial}{\partial z} \int_{A'} \sigma dA$$



Definendo l'integrale al primo membro con φ , flusso di τ attraverso C' , l'equazione diventa:

$$\varphi = - \frac{\partial N}{\partial z} \quad \longleftarrow \quad \text{Equazione dei flussi sorgenti}$$

poiché N non dipende da z , se la C' è uguale per tutte le sezioni, possiamo passare dalla derivata parziale a quella totale, $\varphi = - \frac{dN}{dz}$.

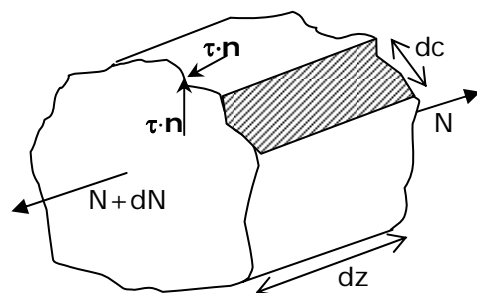
N in generale è diversa da T_z , perché dipendendo dall'integrale, dipende dall'area che si sceglie di integrare. Se prendiamo tutta la sezione allora $N \equiv T_z$, altrimenti compariranno i contributi dei momenti statici, che non sono più nulli. Al contrario della formula che ci permetteva di trovare la σ , e che valeva solo nella parte centrale ma non agli estremi, la formula dei flussi sorgenti è stata ricavata dalle equazioni indefinite di equilibrio e vale anche agli estremi.

Esiste un'altra strada per arrivare all'equazione dei flussi sorgenti.

Prendiamo in considerazione un tubo, dentro la trave, che come superficie laterale ha quella che si genera proiettando la curva C' nella direzione z .

E scriviamo l'equilibrio, di un elementino di trave di lunghezza dz , delle forze agenti sulle facce e sulla superficie laterale:

$$N + dN - N + \int_{C'} \bar{\tau} \cdot \bar{n} dc dz = 0$$



$$dN + \varphi dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = - \frac{dN}{dz}$$

Nella zona centrale sappiamo che $\sigma = \frac{T_z}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x$, sostituendo questa espressione nell'integrale di N, si ottiene:

$$N = \int_{A'} \left(\frac{T_z}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x \right) dA = \frac{T_z}{A} \int_{A'} dA + \frac{M_x}{J_x} \int_{A'} y dA - \frac{M_y}{J_y} \int_{A'} x dA$$

$$N = \frac{T_z}{A} A' + \frac{M_x}{J_x} S'_x - \frac{M_y}{J_y} S'_y$$

e nell'ipotesi che la trave è caricata solo agli estremi, $\frac{dT_z}{dz} = 0$, $\frac{dM_x}{dz} = T_y$, $\frac{dM_y}{dz} = -T_x$, si ha:

$$\frac{dN}{dz} = \frac{dM_x}{dz} \frac{S'_x}{J_x} - \frac{dM_y}{dz} \frac{S'_y}{J_y}$$

$$\varphi = -T_y \frac{S'_x}{J_x} - T_x \frac{S'_y}{J_y}$$

2° forma dell'equazione dei flussi sorgenti, vale solo nella zona centrale

Questa relazione vale solo nella zona centrale, in quanto abbiamo usato l'espressione di σ .

Se la sezione varia lungo z, i momenti statici e d'inerzia dipendono da z, quindi l'equazione dei flussi sorgenti diventa:

$$\varphi = -T_y \frac{S'_x}{J_x} - T_x \frac{S'_y}{J_y} + \underbrace{M_x \frac{d}{dz} \left(\frac{S'_x}{J_x} \right) - M_y \frac{d}{dz} \left(\frac{S'_y}{J_y} \right)}_{\text{Termine di correzione se la trave è rastremata}}$$

Termine di correzione se la trave è rastremata

Strutture a guscio

Andiamo ora a considerare le cosiddette strutture a guscio, tipicamente aeronautiche; per far questo, dobbiamo considerare le seguenti ipotesi:

- Le pareti delle travi sono estremamente sottili;
- I diaframmi sono estremamente rigidi nel piano della sezione e infinitamente cedevoli fuori; inoltre la loro distanza reciproca è tale da garantire deformazione trascurabile della sezione;
- Pannelli sottili e correnti esili.

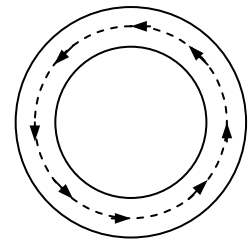
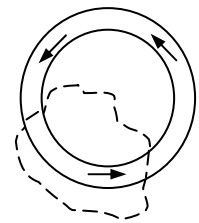
Sezione chiusa

La sezione chiusa presenta un'ottima rigidezza torsionale, dato che le τ possono disporre di un braccio molto grande e quindi creano, con una piccola deformazione, un grande momento torcente.

Inoltre, qualunque linea C' prendiamo, risulta sempre $\varphi=0$ perché ho torsione pura, questo può verificarsi in due casi:

- È tutto fermo (questa soluzione è banale e anche sbagliata perché M_z è necessariamente equilibrato dalle τ).
- Le τ entranti attraverso la linea sono uguali a quelle uscenti.

Se prendiamo una linea che coincide con il contorno, interno o esterno che sia, troviamo sempre $\varphi=0$, cioè le τ circolano restando sempre tangenti al contorno.

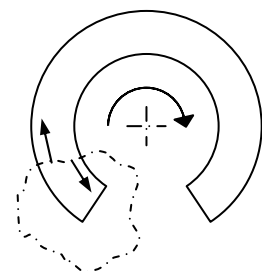


Sezione aperta

Al contrario, la sezione aperta ha una bassa rigidezza torsionale, dato che le linee di flusso devono, in qualche modo, "tornare indietro". Concettualmente poniamo che la rigidezza torsionale della sezione aperta sia nulla; in realtà, un piccolo momento si viene a generare dato che τ non è perfettamente costante nello spessore.

Poiché non abbiamo τ lungo il contorno esterno, le τ lungo il contorno interno devono essere anch'esse tangenti al profilo per avere flusso netto nullo.

Il momento netto delle τ è proporzionale allo spessore della sezione aperta, mentre nel caso di sezione chiusa il momento è proporzionale al raggio della sezione.

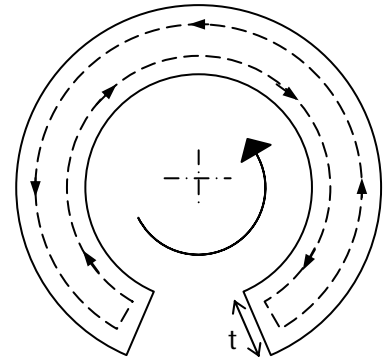


sezione chiusa	$J_{tc} = 2\pi\alpha^3 t^4$		
sezione aperta	$J_{ta} = \frac{2}{3}\pi\alpha t^4$	$\alpha = \frac{r}{t}$	$\frac{J_{tc}}{J_{ta}} = 3\alpha^2$

Per esempio possiamo pensare di avere uno spessore di circa $t=1\text{mm}$ per le ali e $t=1.2\text{mm}$ per le fusoliera. Il diametro per una fusoliera è circa $D=4\text{m}$, si ottiene:

$$r \cong 1 \quad \alpha \cong 1000 \quad \Rightarrow \frac{J_{tc}}{J_{ta}} = 3\alpha^2 = 3 \cdot 10^6$$

quindi possiamo affermare che la rigidezza di una sezione chiusa è di 3 milioni di volte superiore a quella di una sezione aperta.

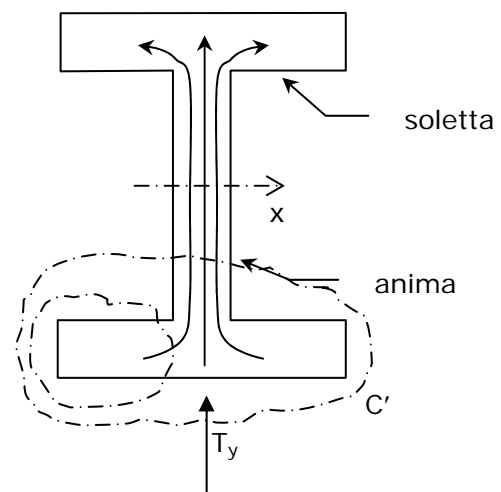


Sezioni a C

Nel caso di una sollecitazione di tagli, per esempio nella sezione a I della figura, le linee di flusso di τ nascono principalmente dalle sorgenti nella soletta inferiore e finiscono nei pozzi della soletta superiore. Questo perché prendendo delle curve C' , che racchiudono la soletta inferiore, ci si accorge che il momento statico è negativo in quanto la y sarà negativa, $S'_x = \int y dA$. Ed il flusso ϕ risulterà positivo, quindi uscente dalla linea chiusa C' .

I pozzi e le sorgenti dell'anima hanno portata molto piccola rispetto a quelli delle solette, sia per l'esiguo spessore che per le modeste distanze dall'asse x , che riducono molto l'entità dei momenti statici.

Prendendo una curva C' che circonda tutta la sezione si ha banalmente che,



$$\phi = -T_y \frac{S'_x}{J_x} - T_x \frac{S'_y}{J_y} = -T_y \frac{S'_x}{J_x}$$

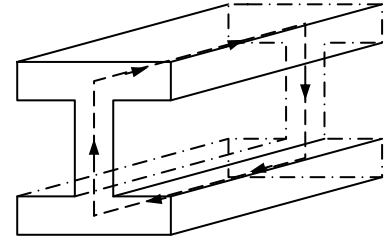
ma S'_x è nullo con la scelta di C' fatta, quindi il flusso ϕ è zero. Possiamo dire che il flusso attraversa l'anima con linee sostanzialmente parallele al contorno e con portata sostanzialmente costante.

Risulta anche evidente che il contributo dello sforzo tangenziale delle solette alla risultante T_y è trascurabile rispetto a quello dell'anima.

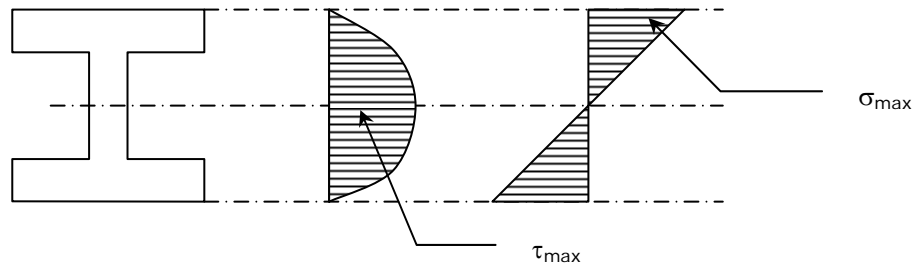
Analogia idraulica

L'analogia idraulica serve per determinare l'andamento qualitativo delle τ , se il taglio non è nullo possiamo pensare che il flusso uscente è prodotto da sorgenti, e quello entrante finisce in pozzi. Il piano della sezione corrisponde al fondo di una vasca su cui sono distribuiti pozzi e sorgenti.

L'andamento delle τ nell'anima è praticamente costante perché non c'è viscosità né turbolenza, la zona più sollecitata è quella corrispondente all'asse x .



Possiamo notare che taglio e flessione sono disaccoppiati, perché il taglio è sopportato dall'anima mentre la flessione carica le zone lontane dal baricentro, cioè le solette. Fortunatamente τ_{\max} e σ_{\max} non si sovrappongono poiché agiscono su zone diverse della sezione.



Se la trave ha dei fori, le zone comprese tra due fori sono molto sollecitate perché c'è una concentrazione di τ , infatti, i finestrini di un aereo non devono presentare spigoli.

Lo sforzo concentrato in uno spigolo è teoricamente infinito, in realtà, il materiale si snerva e lo sforzo risulta molto elevato ma finito (uno sforzo infinito è fisicamente impossibile).

Flussi di taglio

Abbiamo già visto che se consideriamo le soluzioni centrali, possiamo scrivere:

$$\varphi = \int_{C'} \bar{\tau} \cdot \bar{n} dC \quad \varphi = -\frac{dN}{dz} \quad N = \int_{A'} \sigma_z dA$$

fra le ipotesi fatte, per ricavare queste formule sui flussi sorgenti, abbiamo anche detto che il contorno sia scarico, cioè che $\tau \cdot \mathbf{n} = 0$. Questo ci ha fatto capire che il vettore τ deve essere tangente alla superficie della sezione.

Nel caso si tratti di una trave si ha:

$$\sigma_z = \frac{T_z}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x \quad \varphi = -T_y \frac{S'_x}{J_x} - T_x \frac{S'_y}{J_y}$$

Abbiamo anche incontrato delle sezioni chiuse, e possiamo dire che se lo spessore della sezione è grande, o comunque non trascurabile, dobbiamo tenere in conto dei momenti che si creano nella sezione a causa dei due flussi opposti.

Ma se lo spessore è piccolo i momenti lo saranno anch'essi, quindi possiamo andare a considerare la distribuzione delle τ proporzionale alla distanza dal centro. E trascurare il fatto che τ non sia costante lungo lo spessore, ed applicare il risultante in mezzeria.

Introduciamo quindi il concetto di flusso di taglio:

$$q = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau d\xi = \bar{\tau} t$$

Valore medio di τ ,
applicato sulla mezzeria
dello spessore

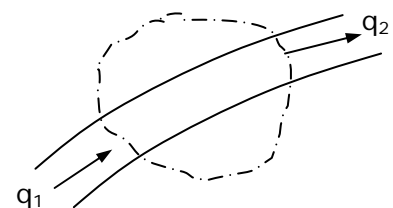
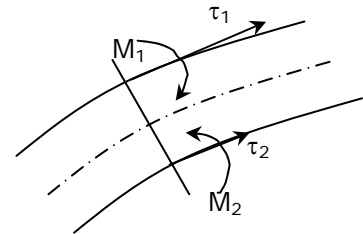
Le unità di misura di q e τ sono, $[q] = \left[\frac{N}{mm}, \frac{kg}{mm} \right]$ e $[\tau] = \left[\frac{N}{mm^2}, \frac{kg}{mm^2} \right]$.

Lo schema a guscio consiste proprio nel considerare il flusso q al posto della distribuzione di τ .

La differenza tra il flusso di taglio uscente q_2 e il flusso di taglio entrante q_1 è pari al flusso sorgente φ :

$$\varphi = q_2 - q_1$$

Se siamo nel caso di torsione pura, cioè $T_x = T_y = 0$ e



$M_z \neq 0$, φ sarà nullo e i flussi di taglio saranno uguali. E questo succede anche se la parete non è molto sottile.

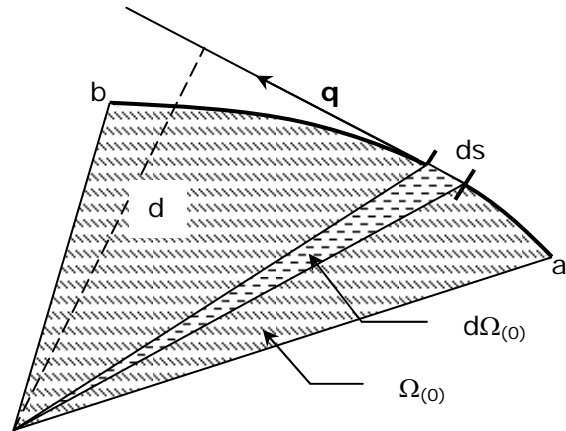
Applichiamo alla nostra sezione chiusa un momento torcente M_z , nasce così dentro la sezione un flusso che possiamo andare a calcolare.

La curva a-b è la linea media del pannello, dove pensiamo applicato il flusso q , si ha:

$$d \cdot ds = 2 d\Omega_{(0)}$$

$$d \cdot q \cdot ds = dM_{z(0)}$$

$$dM_{z(0)} = 2q d\Omega_{(0)}$$



$$M_{z(0)} = \int_a^b 2q d\Omega_{(0)} = 2q \int_a^b d\Omega_{(0)} = 2q\Omega_{(0)}$$

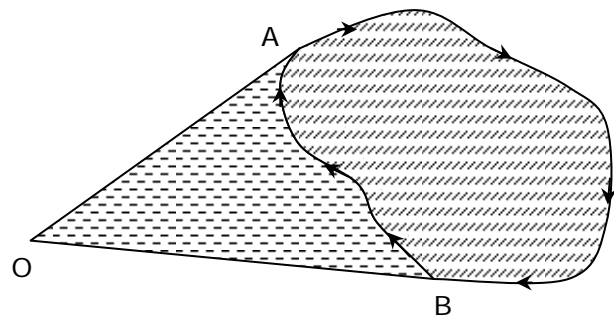
$$M_{z(0)} = 2q\Omega_{(0)}$$

← **I formula di Bredt**

L'area $\Omega_{(0)}$ sottesa dalla curva dipende dal polo se la sezione è aperta, se invece la sezione è chiusa l'area è proprio quella racchiusa dal pannello.

Infatti, se abbiamo una curva chiusa e la percorriamo da A a B, il momento sarà negativo, prendendo positivo il verso antiorario, al contrario sarà positivo il momento da B ad A, quindi il momento netto dipende dall'area differenza fra la prima e la seconda percorsa dal raggio vettore centrato nel polo O, cioè l'area totale.

Il flusso passante nella struttura a guscio sarà:



$$q = \frac{M_z}{2\Omega}$$

Prendiamo in considerazione una trave a parete sottile. Questa trave è formata da due lamiere imbullonate assieme, se i bulloni sono serrati, la trave si comporterà come una trave a sezione chiusa, e riuscirà senza problemi a sopportare dei momenti torcenti.

Se andiamo a togliere una fila di bulloni, la deformazione è troppo grande per poter lavorare a torsione, la trave si comporta come se fosse a sezione aperta.

Se si avvitano soltanto due bulloni, la sezione tiene molto di più, quasi quanto la sezione chiusa della trave

interamente bullonata, e

questo si spiega con il fatto che il bullone impedisce lo scorrimento tra i bordi della

sezione aperta. Per

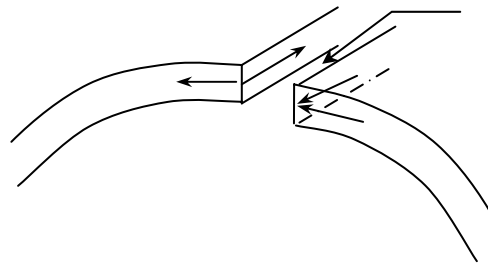
simmetria del tensore degli

sforzi le azioni lungo il taglio della sezione sono azioni

assiali per la sezione, quindi abbiamo una σ prodotta da un momento torcente

M_z e non dalle azioni T_z , M_x e M_y .

Questo fenomeno è detto flessione differenziale.



I bulloni che chiudono la sezione lavorano a taglio

L'area $\Omega_{(0)}$ che compare nella formula di Bredt è per convenzione positiva, se percorrendo la sezione nel verso positivo dei flussi, si va nel verso positivo dei momenti, altrimenti $\Omega_{(0)}$ sarà negativa.

Struttura a semiguscio

Andiamo ad analizzare la struttura di un'ala. La lamiera sottile deve essere sostenuta da una struttura interna che le dia rigidità. Si usano i correnti che sono dei profilati di area trascurabile, e presentano sforzi σ elevati e sforzi τ trascurabili.

Il flusso nel corrente è piccolo perché essendo trascurabile la sua area, il momento statico risulta piccolo. Se l'area è piccola, consideriamo σ costante nel corrente con la risultante N_i applicata su di esso:

$$N_i = \int_{A_i} \sigma dA \quad N_i = \sigma_i A_i$$

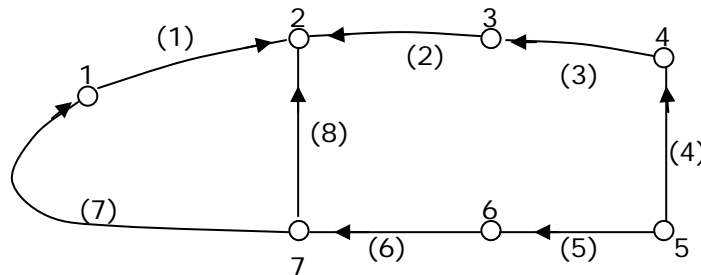
In questo modo otteniamo lo schema a semiguscio: infatti, ipotizziamo che la σ dei pannelli si concentra nei correnti e nei pannelli rimane solo il flusso q .

Il corrente è un punto dotato di area e presenta solo σ , il pannello è una linea dotata di spessore e presenta sia σ che τ .

Questo schema approssimato può essere migliorato aumentando il numero dei correnti, in modo da avere più punti della discretizzazione.

Le incognite del nostro problema da ricercare sono le azioni assiali dei correnti e i flussi dei pannelli.

Prendiamo una struttura così fatta:



La struttura è composta da 7 correnti e 8 pannelli, indicheremo d'ora in avanti il numero dei correnti con la lettera n , e il numero dei pannelli con la lettera m . I nostri dati saranno:

$$\begin{aligned} n=7 \quad A_i \quad E_i &\Rightarrow N_i=? \\ m=8 \quad t_j \quad G_j \quad l_j &\Rightarrow q_j=? \end{aligned}$$

Facciamo una numerazione progressiva dei correnti e dei pannelli, puramente casuale e a nostra scelta. Per le azioni assiali, le prendiamo positive quando sono di trazione, negative quando sono di compressione.

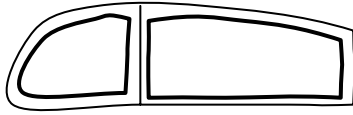
Definiamo, ancora, una matrice $[\beta]$ che regola il segno dei flussi che entrano o escono da un certo corrente, diciamo che:

$$[\beta] \Rightarrow \beta_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se il flusso } j \text{ esce dal nodo } i \\ 1 & \text{se il flusso } j \text{ entra nel nodo } i \\ 0 & \text{se il flusso } j \text{ non interagisce con il nodo } i \end{cases}$$

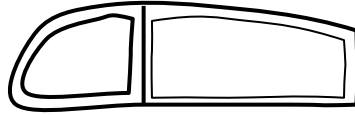
nel nostro caso otteniamo una matrice 7×8 così fatta;

$$[\beta] = \begin{matrix} i= & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & j= \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$

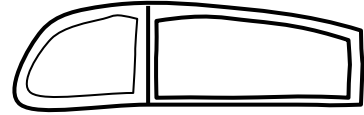
Nella struttura presa in esame possiamo individuare dei percorsi chiusi. Questi percorsi chiusi vengono chiamati celle. Le celle che andremo a prendere sono indipendenti, cioè non sono ottenute dalla combinazione lineare di altre celle. Nel nostro caso ci sono tre possibili scelte di celle:



I scelta



II scelta



III scelta

Per determinare il numero esatto di celle della struttura, possiamo ricorrere al numero ciclomático del grafo, che si trova tramite la relazione:

$$\aleph = m - n + 1$$

Questa relazione, data per calcolare \aleph , va bene se il grafo non è fatto di parti sconnesse. Se lo è allora la relazione diventa:

$$\aleph = m - n + r$$

dove r è il numero di parti sconnesse.

La scelta delle celle è una scelta puramente arbitraria, e nel nostro caso scegliamo la prima delle tre possibili.

Avendo scelto un verso arbitrario, quello antiorario cioè quello concorde con il verso del momento torcente M_z , sia delle celle che dei pannelli, facciamo in modo da sistemare questi versi introducendo una matrice $[\alpha]$ che descrive i legami tra le celle e i pannelli:

$$[\alpha] \Rightarrow \alpha_{jk} = \begin{cases} -1 & \text{se il flusso } j \text{ ha verso discorde con la cella } k \\ 1 & \text{se il flusso } j \text{ ha verso concorde con la cella } k \\ 0 & \text{se il flusso } j \text{ non interagisce con la cella } k \end{cases}$$

otteniamo una matrice 7x2 così fatta:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nel caso di materiali isotropi la determinazione degli sforzi σ e τ viene fatta in due fasi successive: prima andremo a determinare le σ e poi le τ .
Lontano dalle zone di estremità vale la formula della flessione, cioè

$$\sigma = \frac{T_z}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x$$

supponendo σ uniforme su tutta la sezione, l'azione assiale nel corrente i vale:

$$N_i = \sigma A_i = \frac{T_z}{A} A_i + \frac{M_x}{J_x} S_{xi} - \frac{M_y}{J_y} S_{yi}$$

dove S_{xi} e S_{yi} sono i momenti statici del corrente i -esimo.

A partire da assi generici, calcoliamo il baricentro imponendo che i momenti statici siano uguali a zero, troviamo gli assi principali d'inerzia imponendo che il momento centrifugo J_{xy} sia nullo, sommiamo i momenti d'inerzia delle aree A_i concentrate nei correnti. Chiaramente il calcolo degli assi e del baricentro si semplifica di molto se la sezione presenta assi di simmetria.

Per determinare il flusso di taglio q_j usiamo l'equazione dei flussi sorgenti:

$$q_j = -T_y \frac{S_{xi}}{J_x} - T_x \frac{S_{yi}}{J_y}$$

Se soddisfiamo tutte le equazioni dei flussi sorgenti, garantiamo l'equilibrio alla traslazione lungo x e y , ma non l'equilibrio alla rotazione. Le equazioni sono n , infatti, prendendo una linea intorno a ogni corrente definiamo n flussi q_j , ma queste equazioni non sono tutte indipendenti, solo $n-1$ lo saranno, perché abbiamo la condizione che la somma delle portate di tutte le sorgenti deve essere nulla.

Siamo arrivati alla conclusione di avere n equazioni: $n-1$ ottenute dalla scrittura della relazione dei flussi sorgenti attorno ad $n-1$ correnti, più una ottenuta dall'equilibrio alla rotazione di M_z .

Ma le incognite sono m , date dal numero dei pannelli.

Sappiamo che fra n ed m vale la regola del numero cicломatico, cioè $\aleph = m - n + 1$, quindi possiamo fare una distinzione al variare della nostra sezione.

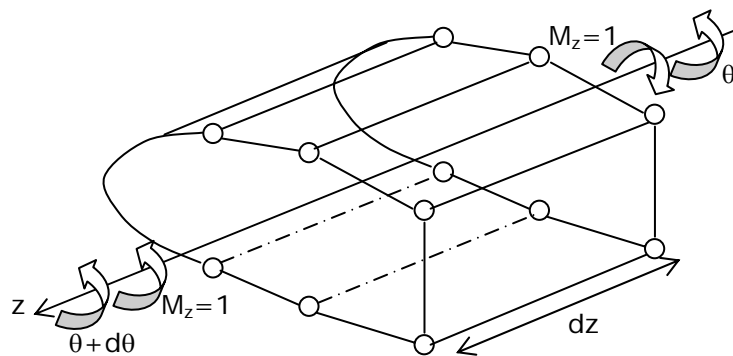
Se la sezione è aperta, \aleph è nullo quindi $n=m+1$. Questo implica che abbiamo una equazione in più che non possiamo soddisfare, si tratta dell'equazione di equilibrio alla torsione, infatti, la sezione aperta è labile a torsione.

Con la relazione dei flussi sorgenti determiniamo tutti i flussi q_j e poi possiamo determinare il centro di taglio con l'equivalenza tra il momento torcente dei flussi e quello del taglio. Infatti, quest'ultimo deve passare per il centro di taglio affinché si abbia equilibrio.

Se la sezione è chiusa ed ha una sola cella, $N=1$ quindi $m=n$. In questo caso il numero di equazioni sarà uguale al numero delle incognite, la sezione sarà isostatica.

Se la sezione è chiusa ma ha più di una cella, $N>1$ quindi $m>n$. Il numero di incognite sarà maggiore del numero delle equazioni, quindi le equazioni di equilibrio non bastano per risolvere il problema, e bisogna aggiungere le equazioni di congruenza.

Andiamo a vedere come si scrivono le equazioni di congruenza. Chiamiamo θ la deformazione torsionale e supponiamo che θ vari con l'apertura z , cioè $\theta=\theta(z)$.



Consideriamo due sezioni a distanza infinitesima dz , supponiamo di aver già determinato i flussi di taglio q_j . Vogliamo valutare la rotazione relativa tra le due sezioni, cioè $d\theta$.

Applichiamo il PLVC al tratto di trave dz :

	spost. reali	forze fittizie
esterni	$\theta, \theta + d\theta$	$\hat{M}_z = -1, \hat{M}_z = 1$
interne	$\gamma_j = \frac{\tau_j}{G} = \frac{q_j}{t_j G}$	$\hat{q}_{j(k)} = \frac{\alpha_{jk}}{2\Omega_k} = \hat{\tau}_j t_j$

Il sistema di forze fittizie deve essere equilibrato, quindi applichiamo due momenti torcenti unitari ed opposti.

Il lavoro virtuale delle forze esterne è,

$$\delta L_e = 1 \cdot (\theta + d\theta) - 1 \cdot \theta = 1 \cdot d\theta$$

Il lavoro di deformazione sarà,

$$\delta I_d = \sum_{j=1}^m \int_{V_j} \gamma_j \hat{\tau}_j dV$$

Restano costanti sul pannello j-esimo.

$$\delta L_d = \sum_{j=1}^m \gamma_j \hat{\tau}_j V_j = \sum_{j=1}^m \gamma_j \hat{\tau}_j l_j t_j dz$$

ma dato che $\gamma_j = \frac{\tau_j}{G} = \frac{q_j}{t_j G}$, si ha

$$\delta L_d = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{t_j G} \frac{\hat{q}_j}{t_j} l_j t_j dz = \sum_{j=1}^m \frac{q_j \hat{q}_j}{t_j G} l_j dz$$

I flussi fittizi \hat{q}_j devono essere equilibrati, possiamo distribuirli come vogliamo purché siano in equilibrio con il momento torcente esterno. Scegliamo una cella k e ipotizziamo che i flussi si distribuiscono solo su questa cella, in modo da poter usare l'espressione $q = \frac{M}{2\Omega}$:

$$\delta L_e = \delta L_d \Rightarrow 1 \cdot d\theta = \sum_{j=1}^m \frac{q_j}{t_j G} \frac{\alpha_{jk}}{2\Omega_k} l_j dz = \frac{1}{2G\Omega_k} \sum_{j=1}^m \frac{q_j l_j}{t_j} \alpha_{jk} dz$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2G\Omega_k} \sum_{j=1}^m \frac{q_j l_j \alpha_{jk}}{t_j}$$

II formula di Bredt

L'espressione ottenuta dipende formalmente dalla cella k su cui stiamo lavorando, ma siccome la struttura è rigida, indipendentemente dalla scelta della cella, tutte le θ'_k sono uguali.

Sapendo che in una cella possiamo aggiungere un flusso arbitrario q_k^* senza alterare l'equilibrio dei flussi sorgenti, perché esso dà un contributo nullo al flusso netto attraverso una qualsiasi linea chiusa.

Se la sezione ha una cella, le n-1 equazioni dei flussi sorgenti ci consentono di determinare gli m=n flussi q_j a meno di una costante, cioè a meno di un flusso q^* uniforme nella cella.

Questo flusso deve soddisfare l'ulteriore equazione, cioè l'equilibrio alla rotazione.

Allora possiamo andare a tagliare un pannello in modo da rendere aperta la sezione, quindi le n-1 equazioni dei flussi sorgenti saranno sufficienti a determinare univocamente i flussi di tale sezione. E i flussi della sezione chiusa saranno dati da:

$$q_j = q'_j + \alpha_{j1} q^*$$

dove con q'_j si sono indicati i flussi della sezione aperta. A questo punto per determinare l'ulteriore incognita q^* si impone l'equilibrio alla rotazione:

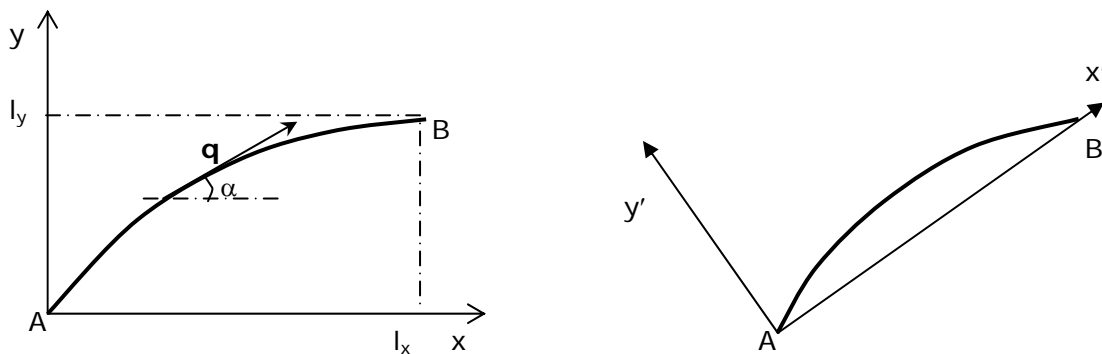
$$\sum_{j=1}^m q'_j 2\Omega_{0j} + q^* 2\Omega_1 = M_z$$

Se la sezione ha più celle il procedimento è del tutto analogo a quello appena descritto, con la differenza di avere più flussi q^* , che vengono determinati con più condizioni di equilibrio:

$$\sum_{j=1}^m q'_j 2\Omega_{0j} + \sum_{k=1}^N q_k^* 2\Omega_k = M_z$$

Risultante del flusso su un pannello

Supponiamo di avere un pannello e di voler trovare la risultante del flusso. Costruiamo un sistema di riferimento cartesiano, posizionando l'origine del riferimento su un estremo del pannello:



Si ha:

$$R_x = \int_A^B q \cos \alpha \, ds = q l_x \quad , \quad R_y = q l_y$$

Se prendiamo in considerazione il sistema di riferimento d'assi $x' y'$, si ottiene che:

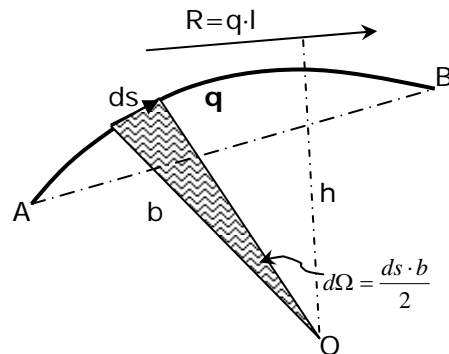
$$R_{x'} = q l \quad , \quad R_{y'} = 0$$

questo ci fa capire che il risultante è sempre parallelo alla congiungente gli estremi del pannello, per determinare il suo punto d'applicazione basta scrivere l'equivalenza dei momenti rispetto ad un polo O,

$$Rh = \int_A^B qb \, ds = q \int_A^B b \, ds = q \int_A^B 2d\Omega = 2q\Omega$$

$$qlh = 2q\Omega$$

$$h = \frac{2\Omega}{l}$$



abbiamo determinato la distanza dal polo arbitrario scelto, ma non esattamente dove si trova. Se ipotizziamo di scegliere come polo l'estremo A, si ottiene che

$$h = \frac{2\Omega}{AB}$$

la relazione ottenuta ci dice che, se il pannello è rettilineo allora la risultante agirà su di esso, se invece il pannello non è rettilineo allora la risultante passerà dalla parte convessa del pannello rispetto la congiungente gli estremi.

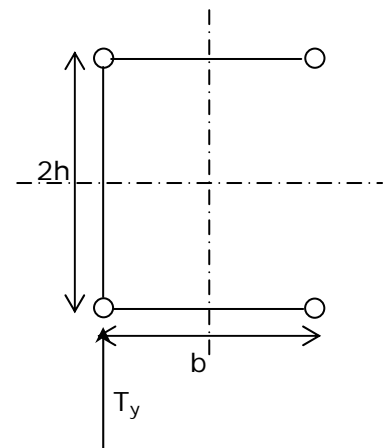
Esempio

Supponiamo di avere una sezione aperta a forma di C, e supponiamo ancora di avere già ricavato l'azione interna T_y agente sulla sezione. Le azioni assiali sui correnti sono date da:

$$N_i = \frac{T_z}{A} A_i + \frac{M_x}{J_x} S_{xi} - \frac{M_y}{J_y} S_{yi}$$

Essendo la sezione simmetrica, troviamo subito il baricentro, la simmetria è legata ai correnti di area A e non ai pannelli, che ricordiamo non hanno area. Il momento d'inerzia J_x , l'unico che ci interessa sarà:

$$J_x = 4Ah^2 \quad q_j = -T_y \frac{S'_{xi}}{J_x}$$

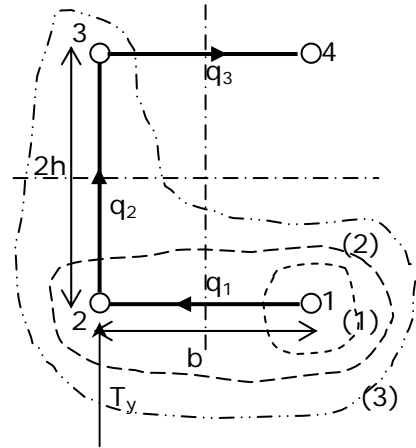


per semplificare i calcoli scegliamo ogni linea in modo tale che attraversi un solo pannello, così abbiamo un solo flusso da valutare in ogni equazione:

$$q_1 = -\frac{T_y}{4Ah^2}(-Ah) = \frac{T_y}{4h}$$

$$q_2 = -\frac{T_y}{4Ah^2}(-Ah - Ah) = \frac{T_y}{2h}$$

$$q_3 = -\frac{T_y}{4Ah^2}(-Ah - Ah + Ah) = \frac{T_y}{4h}$$



se prendessimo una ulteriore linea contenente anche il corrente 4, scriveremmo un'identità, $0=0$. Perché il flusso totale uscente è nullo come anche il momento statico di tutta la sezione.

Per determinare i flussi q_j abbiamo usato $n-1$ equazioni, ci chiediamo se i flussi trovati sono effettivamente equivalenti all'azione T_y , cioè dobbiamo verificare che valga $R_x=0$ e $R_y=T_y$, si ha:

$$R_x = q_3b - q_1b = 0 \quad , \quad R_y = q_2 2h = T_y$$

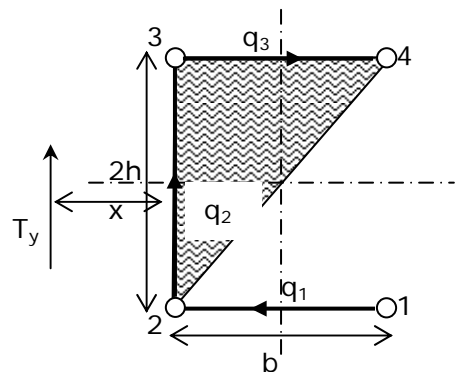
Per trovare la distribuzione dei flussi non abbiamo dovuto precisare il punto d'applicazione di T_y , questo non significa che T_y può passare per un punto qualsiasi, e per trovare questo punto, scriviamo l'equivalenza dei momenti creati da T_y e dai flussi q_j .

Scegliamo come polo il corrente 2 della sezione, si ottiene

$$T_y \cdot x = \sum_{j=1}^m 2q_j \Omega_{0j} = 2q_1 \Omega_{01} + 2q_2 \Omega_{02} + 2q_3 \Omega_{03}$$

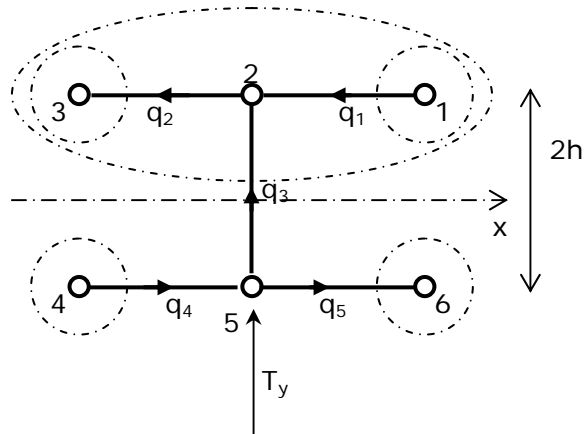
ma dato che $\Omega_{01} = 0, \Omega_{02} = 0, \Omega_{03} = bh$, si ha:

$$T_y \cdot x = 2 \frac{T_y}{4h} bh = \frac{T_y b}{2} \Rightarrow x = \frac{b}{2}$$



Il punto trovato è il centro di taglio cioè il punto per il quale deve passare T_y affinché siano soddisfatte tutte le equazioni di equilibrio.

Esempio 2



Il momento d'inerzia J_x sarà:

$$J_x = 6Ah^2$$

i flussi saranno:

$$q_1 = -\frac{T_y}{6Ah^2}(Ah) = -\frac{T_y}{6h}$$

$$-q_2 = -\frac{T_y}{6Ah^2}(Ah) = -\frac{T_y}{6h} \Rightarrow q_2 = \frac{T_y}{6h}$$

$$-q_3 = -\frac{T_y}{6Ah^2}(3Ah) = -\frac{T_y}{2h} \Rightarrow q_3 = \frac{T_y}{2h}$$

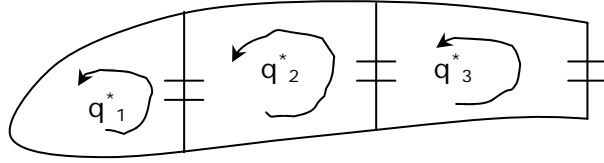
$$q_4 = -\frac{T_y}{6Ah^2}(-Ah) = \frac{T_y}{6h}$$

$$-q_5 = -\frac{T_y}{6Ah^2}(-Ah) = \frac{T_y}{6h} \Rightarrow q_5 = -\frac{T_y}{6h}$$

Dalla simmetria della sezione si capisce facilmente che T_y deve passare sul pannello 3.

Dimostrazione dell'equazione di congruenza

Prendiamo in esame la seguente struttura a tre celle:



Immaginiamo di aprire la struttura ad albero, e a questo punto possiamo affermare che i flussi q_j dei pannelli della sezione chiusa saranno dati dalla relazione:

$$q_j = q'_j + \sum_{k=1}^N q_k^* \alpha_{jk}$$

A questa equazione va aggiunta quella di equivalenza dei momenti:

$$\sum_{j=1}^m q_j 2\Omega_{0j} = \sum_{j=1}^m q'_j 2\Omega_{0j} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^N q_k^* 2\Omega_{0j} \alpha_{jk}$$

ponendo $\Omega_k = \sum_{j=1}^m \alpha_{jk} \Omega_{0j}$ si ha:

$$M_z = \sum_{j=1}^m q'_j 2\Omega_{0j} + \sum_{k=1}^N q_k^* 2\Omega_k$$

Per imporre la congruenza usiamo il teorema di Menabrea, dobbiamo quindi minimizzare l'energia di deformazione. L'energia di deformazione è dovuta soltanto ai correnti e ai pannelli, infatti, i diaframmi hanno un'energia di deformazione nulla in quanto per ipotesi sono rigidi nel piano e fuori dal piano si deformano con sforzi nulli.

L'energia di deformazione sarà:

$$V_d = V_{dc}(N_i) + V_{dp}(q_j)$$

dove il contributo dei pannelli può essere scritto come:

$$V_{dp} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \int_{V_j} \tau_j \gamma_j dV = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \int_{V_j} \frac{q_j}{t_j} \frac{q_j}{t_j G} dV = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{q_j^2}{t_j^2 G} \int_{V_j} dV = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{q_j^2}{t_j^2 G} t_j l_j dz$$

$$V_{dp} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{q_j^2}{t_j G} l_j dz$$

Da questa relazione togliamo il dz , perché andiamo a minimizzare un tratto di lunghezza finita e non infinitesima. Il compito che ci attende è quello di trovare le q_k^* che minimizzano l'energia di deformazione e che soddisfano l'equilibrio dei momenti. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\tilde{V}_d = V_{dc}(N_i) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{q_j^2 l_j}{G t_j} + \lambda \left(M_z - \sum_{j=1}^m q_j' 2\Omega_{0j} - \sum_{k=1}^N q_k^* 2\Omega_k \right)$$

Le nostre equazioni saranno le derivate parziali dell'energia di deformazione rispetto alle q_k^* , e saranno tante quante sono le celle:

$$\frac{\partial \tilde{V}_d}{\partial q_k^*} = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^m \frac{q_j l_j}{G t_j} \alpha_{jk} - \lambda 2\Omega_k \right) = 0$$

otteniamo un sistema di N equazioni, con l'aggiunta dell'incognita λ , che sarà uguale a:

$$\lambda = \frac{1}{2G\Omega_k} \sum_{j=1}^m \frac{q_j l_j}{t_j} \alpha_{jk} = \dot{\theta}_k = \dot{\theta}$$

Poiché la sezione non si deforma nel suo piano, le rotazioni valutate con le N celle hanno tutte lo stesso valore. L'ipotesi di lavoro di deformazione nullo per i diaframmi viene quindi confermata.

Centro di taglio

Una trave schematizzabile a semiguscio, con la sezione aperta, non è in grado di sopportare, equilibrare, un taglio che non passi dal centro di taglio, ovvero non può sopportare un momento rispetto al centro di taglio.

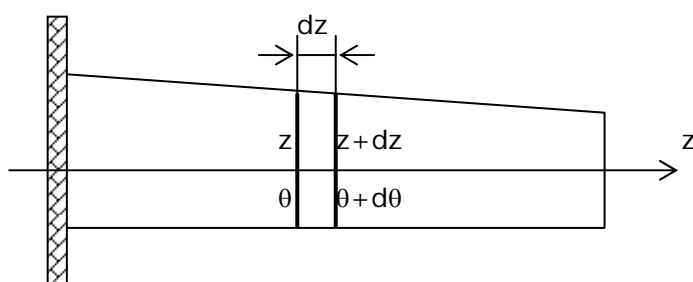
Nel caso di trave a semiguscio con sezione chiusa, il centro di taglio è definito come il punto di applicazione del taglio che realizza $\theta'=0$. Ma questo punto, a differenza del caso a sezione aperta, può essere definito al di là delle ipotesi di trave a semiguscio. In altri termini, il centro di taglio della sezione chiusa può essere definito, anche per le travi a sezione massiccia.

In tal caso però, poiché non si ha più in generale a che fare con rotazioni rigide (la rotazione varia da punto a punto), bisogna ricorrere a definizioni energetiche: il centro di taglio è quel punto rispetto al quale, se vi si applica il taglio, il lavoro incrociato taglio-momento torcente è nullo.

Il centro di taglio della sezione chiusa coincide con il centro della rotazione relativa fra due sezioni infinitamente vicine quando l'azione interna è solo il momento torcente M_z .

Dal punto di vista cinematico si può quindi pensare alla trave a guscio, come un insieme di sezioni rigide girevoli intorno ad un perno, che ha la rigidezza flessionale della trave e passa per i centri di taglio delle sezioni.

Le sezioni sono collegate fra di loro da molle, che hanno rigidezza torsionale pari alla rigidezza torsionale della trave. Però, il centro degli sforzi normali della sezione, cioè, il punto nel quale deve essere applicata l'azione assiale perché non si abbia flessione, è il baricentro, che in genere non coincide con il centro di taglio.



$$\theta = \int_0^z \dot{\theta} dz + \theta(0)$$

Si noti che, mentre è scorretto in generale parlare di rotazione torsionale, in senso assoluto, è necessario invece parlare di deformazione torsionale; questo perché il centro di taglio è una proprietà locale, relativa ad una certa sezione (a meno che la trave non sia a sezione costante); ciò non toglie che, dal punto di vista pratico, il luogo dei centri di taglio deve essere possibilmente una retta e per giunta passante ad una certa percentuale della corda, per problemi aeroelastici.

Ingobbamento (Warping)

Abbiamo detto nelle nostre ipotesi che i diaframmi non si oppongono alla deformazione fuori dal piano su cui giacciono. Adesso vogliamo studiare questo fenomeno, cioè di quanto si deformano le sezioni fuori dal piano.

Questo fenomeno è chiamato ingobbamento (warping).

Se chiamiamo \mathbf{s}_i il vettore spostamento del corrente i -esimo, l'ingobbamento dipende solo dalla componente z , e avendo n correnti, possiamo avere n misure.

Sappiamo che bastano solo 3 correnti per definire un piano della sezione, quindi per determinare se la sezione si è ingobbata, basta verificare che i rimanenti correnti stanno o no sul piano costruito in precedenza. Quindi ci restano $n-3$ parametri.

Supponiamo di scegliere un sistema arbitrario di azioni assiali virtuali \hat{N}_i e calcoliamo il lavoro virtuale complementare:

$$\hat{L} = \sum_{i=1}^n \hat{N}_i s_{zi} = \{N\}^T \{s_z\}$$

Se la sezione si ingobba, lo spostamento di un punto ha una parte traslatoria, uguale per tutti i punti, una parte rotatoria e una parte deformativa:

$$\bar{s}_i = \bar{\omega} + \bar{\alpha} \wedge (P_i - 0) + g_i \bar{k}$$

poiché $\bar{\alpha} \wedge (P_i - 0) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha_x & \alpha_y & \theta \\ x & y & 0 \end{vmatrix}$, lo spostamento che ci interessa sarà:

$$s_{zi} = \omega_z - x\alpha_y + y\alpha_x + g_i$$

il lavoro diventa,

$$\hat{L} = \sum_{i=1}^n \hat{N}_i s_{zi} = \omega_z \sum_{i=1}^n \hat{N}_i - \alpha_y \sum_{i=1}^n x_i \hat{N}_i + \alpha_x \sum_{i=1}^n y_i \hat{N}_i + \sum_{i=1}^n g_i \hat{N}_i$$

$$\hat{L} = \omega_z \hat{T}_z + \alpha_y \hat{M}_y - \alpha_x \hat{M}_x + \sum_{i=1}^n \hat{N}_i g_i$$

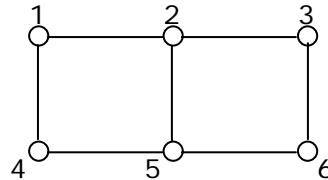
Lavoro delle forze per gli spostamenti Lavoro dei momenti per le rotazioni Lavoro di deformazione

Se $T_z = M_x = M_y = 0$, il sistema è autoequilibrato e il lavoro è dato solo dalle deformazioni $\hat{L} = \sum_{i=1}^n \hat{N}_i g_i = \sum_{i=1}^n \hat{N}_i s_{zi} \Rightarrow g_i = s_{zi}$, le deformazioni misurano proprio l'entità dell'ingobbamento.

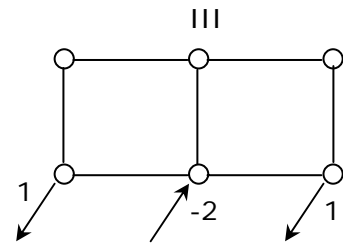
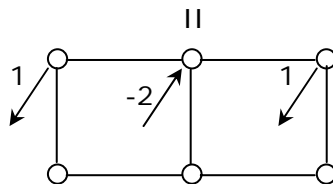
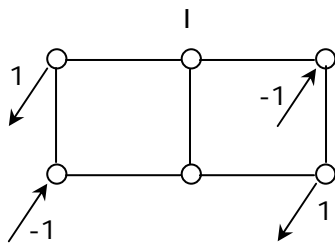
Possiamo immaginare di trovare, per una sezione qualsiasi, $n-3$ sistemi di azioni assiali autoequilibrate, e qualsiasi sistema di azioni, combinazione lineare di quelle trovate, è ancora autoequilibrato.

Per esempio se abbiamo una sezione a 4 correnti, la scelta sarà obbligata, in quanto si avrà solo 1 sistema possibile, $4-3=1$.

Ma se la sezione è a 6 correnti, per esempio:



Si avranno 3 sistemi assiali autoequilibrati, $6-3=3$.



Si noti come le azioni assiali siano equilibrate.

Numerando i correnti possiamo costruire delle matrici colonne, che descrivono le azioni assiali autoequilibrate trovate. Si ha:

$$\{L_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{L_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{L_3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

e possiamo anche costruire la matrice $n \times (n-3)$ $[L]$, che ha per colonne le azioni assiali autoequilibrate:

$$[L] = [L_1, L_2, \dots, L_{n-3}]$$

Ricordiamo che facendo una combinazione lineare delle colonne si ottiene sempre un sistema assiale autoequilibrato.

Adesso andiamo ad introdurre la matrice colonna $\{\psi\}_{(n-3) \times 1}$, fatta di costanti per scrivere azioni assiali autoequilibrate, possiamo dire che:

$$\{\hat{N}\}_{n \times 1} = [L]_{n \times (n-3)} \{\Psi\}_{(n-3) \times 1}$$

Il lavoro in forma matriciale diventa,

$$\hat{L} = \{\hat{N}\}^T \{s_z\} = \{\Psi\}^T [L]^T \{s_z\}$$

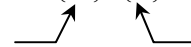
se introduciamo con $\{\Delta\}$, la matrice $(n-3) \times 1$, ottenuta dal prodotto

$$\{\Delta\}_{(n-3) \times 1} = [L]^T \{s_z\}$$

**Parametri
d'ingobbamento**

il lavoro può essere scritto come:

$$\hat{L} = \{\Psi\}^T \{\Delta\}$$

Forze  Spostamenti

Se la matrice $\{\Delta\}$ ci dà i valori d'ingobbamento della sezione, se l'ingobbamento è nullo allora $\{\Delta\} = \{0\}$.

Tutto quello che abbiamo visto finora vale solo se siamo lontani dall'estremità. Vicino al vincolo, il risultante, cioè l'azione assiale, il momento flettente e il momento torcente, non cambia ma i flussi di taglio della sezione risultano diversi. La correzione che dobbiamo portare, però non deve alterare la risultante.

I sistemi che dobbiamo costruire per correggere i risultati dovranno essere a risultante e momento risultante nullo.

Le azioni assiali saranno anche dei flussi autoequilibrati e in equilibrio con le azioni assiali, quindi devono soddisfare le equazioni dei flussi sorgenti:

$$\varphi_i = -\frac{dN_i}{dz}$$

e dovranno avere $\hat{M}_z = 0$. Andiamo a costruire i flussi uscenti dai singoli nodi, si ha

$$-\{\varphi\} = [\beta]\{q\}$$

$$[\beta]\{q\} = \frac{d}{dz}\{N\}$$

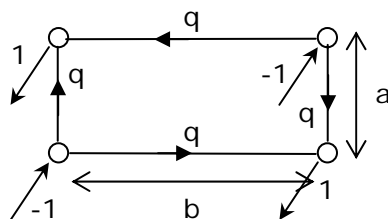
$$[\beta]\{\hat{q}\} = \frac{d}{dz}([L]\{\Psi\}) = [L]\frac{d}{dz}\{\Psi\} = [L]\{\Psi'\}$$

queste che abbiamo ottenuto sono n equazioni, ma solo n-1 sono utili, quindi una la togliamo e la sostituiamo con la relazione $\hat{M}_z = 0$ delle \hat{q} ,

$$\{\hat{q}\} = [\hat{H}]\{\Psi'\}$$

Esempio

Prendiamo in esame una sezione a 4 correnti. La giusta disposizione dei flussi, la possiamo dedurre dall'analogia idraulica, e fra tutte le possibili combinazioni dobbiamo scegliere quella che dà momento torcente nullo. Si ha,



Intuitivamente possiamo pensare che il flusso che entra nel corrente si distribuisca perfettamente a metà nei due pannelli, $q = \frac{1}{2}$, e costruendoci il

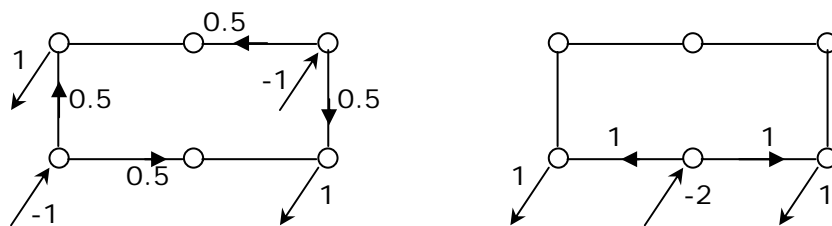
momento torcente rispetto ad un polo qualsiasi, per esempio un corrente, si ha,

$$M_z = bqa - aqb = 0$$

quindi la nostra scelta è corretta.

Esempio

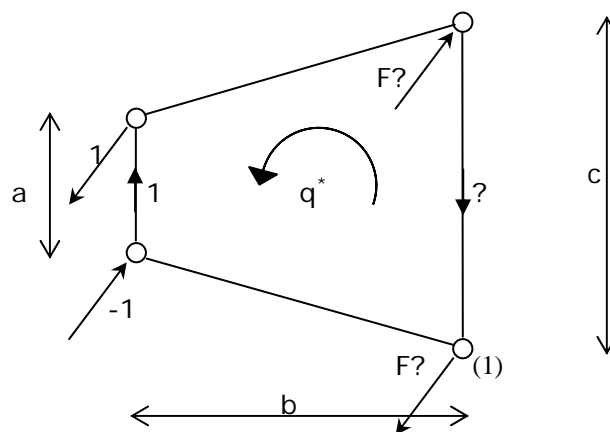
Andiamo a prendere una sezione a 6 correnti, questa volta le distribuzioni possibili saranno due, ed esattamente:



Si può vedere facilmente che anche in questo caso si ha $\hat{M}_z = 0$.

Esempio

Complichiamo un po' la sezione,



Dal fatto che il $T_z=0$, sappiamo che le due azioni assiali di destra devono essere uguali, e così facendo accade che anche $M_y=0$.

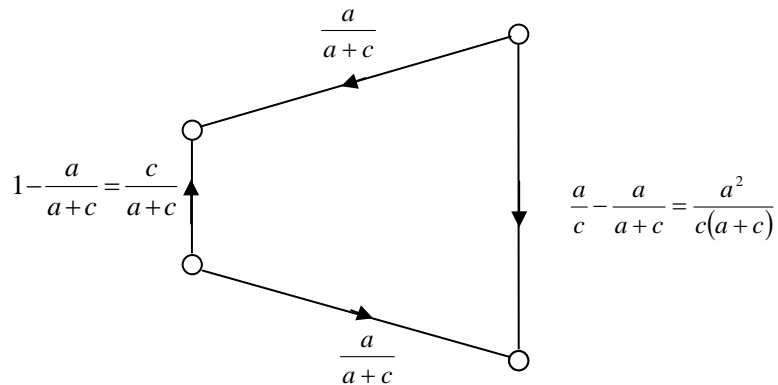
Per avere momento rispetto all'asse x nullo, imponiamo che,

$$1 \cdot \frac{a}{2} + 1 \cdot \frac{a}{2} - F \frac{c}{2} - F \frac{c}{2} = 0 \Rightarrow F = \frac{a}{c}$$

Adesso dobbiamo imporre che anche il momento torcente dia nullo, e lo calcoliamo rispetto al polo (1). Introduciamo un flusso fittizio q^* , l'unico flusso della struttura che genera area non nulla per il polo scelto, è quello di sinistra, quindi si ottiene:

$$-ab \cdot 1 + \hat{q}^*(a+c)b = 0 \Rightarrow \hat{q}^* = \frac{a}{a+c}$$

quindi i flussi finali della struttura saranno,



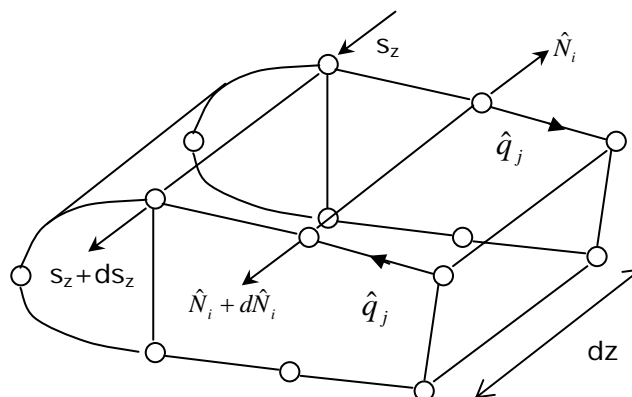
Così facendo riusciamo a scrivere la matrice [H]. i flussi della matrice [H] non devono soddisfare la congruenza, perché abbiamo utilizzato delle forze virtuali, che sono di per se già congruenti.

Al contrario quando andiamo a trovare i flussi correttivi, perché stiamo cercando dei flussi reali, allora la matrice [H] deve tenere in conto della congruenza.

Eravamo partiti dall'ingobbamento e avevamo trovato la matrice che ci dava gli spostamenti dal piano iniziale,

$$\{\Delta\} = [L]^T \{s_z\}$$

Consideriamo la seguente struttura,



Il lavoro esterno sarà,

$$L_{ext} = \{\hat{N} + d\hat{N}\}^T \{s_z + ds_z\} - \{\hat{N}\}^T \{s_z\} + L_{ext}(\hat{q})$$

Se il sistema di \hat{N} e \hat{q} è autoequilibrato, il $L_{ext}(\hat{q}) = 0$ perché la sezione ha un moto rigido nel piano e i flussi lavorano nel piano della sezione.

$$L_{ext} = \{\hat{N}\}^T \{s_z\} + \{d\hat{N}\}^T \{s_z\} + \{\hat{N}\}^T \{ds_z\} + \{d\hat{N}\}^T \{ds_z\} - \{\hat{N}\}^T \{s_z\}$$

$$L_{ext} = \{d\hat{N}\}^T \{s_z\} + \{\hat{N}\}^T \{ds_z\}$$

Si trascura perché è un infinitesimo di ordine superiore

Passiamo a calcolare il lavoro interno, cominciando con il lavoro di deformazione dei correnti,

$$L_{dc} = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \hat{\sigma}_i \varepsilon_i dV = \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i \varepsilon_i A_i dz = \sum_{i=1}^n \hat{N}_i \varepsilon_i dz = \{\hat{N}\}^T \{\varepsilon\} dz$$

Essendo σ e ε costanti sul corrente possiamo portarli fuori dall'integrale.

Adesso calcoliamo il lavoro di deformazione dei pannelli,

$$L_{dp} = \sum_{j=1}^m \int_{V_j} \hat{\tau}_j \gamma_j dV = \sum_{j=1}^m \frac{\hat{q}_j}{t_j} \frac{q_j}{t_j G} l_j t_j dz = \sum_{j=1}^m \frac{\hat{q}_j q_j l_j}{G t_j} dz$$

per poter scrivere il lavoro dei pannelli appena ricavato in forma matriciale, introduciamo una matrice diagonale così fatta, $\text{diag}\left(\frac{l}{tG}\right)$:

$$L_{dp} = \{\hat{q}\}^T \text{diag}\left(\frac{l}{tG}\right) \{q\} dz$$

Infine, uguagliando il lavoro esterno a quello di deformazione, si ottiene:

$$\{d\hat{N}\}^T \{s_z\} + \{\hat{N}\}^T \{ds_z\} = \{\hat{N}\}^T \{\varepsilon\} dz + \{\hat{q}\}^T \text{diag}\left(\frac{l}{tG}\right) \{q\} dz$$

ma dato che $\varepsilon_z = \varepsilon_{zi} = \frac{ds_{zi}}{dz}$, il secondo termine del primo membro e il primo termine del secondo membro si elidono, semplificando la relazione si ha:

$$\{d\hat{N}\}^T \{s_z\} = \{\hat{q}\}^T \text{diag}\left(\frac{l}{tG}\right) \{q\} dz$$

La relazione ottenuta vale per ogni sistema fittizio purché sia autoequilibrato, ricordando che,

$$\{\hat{dN}\}^T = \{d\Psi\}^T [L]^T \quad \text{e} \quad \{\hat{q}\}^T = \{\Psi'\}^T [\hat{H}]^T$$

l'espressione ottenuta diventa,

$$\{d\Psi\}^T [L]^T \{s_z\} = \{\Psi'\}^T [H]^T \text{diag}\left(\frac{l}{tG}\right) \{q\} dz$$

ma se la ψ è regolare allora $\{\Psi'\} dz = \{d\Psi\}$, si ha dunque

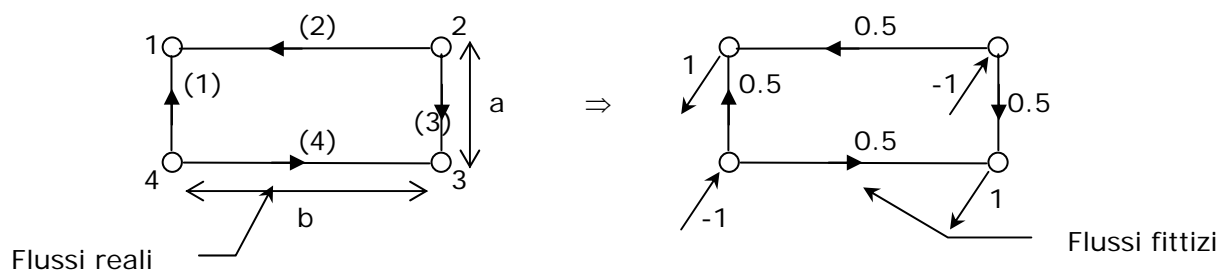
$$[L]^T \{s_z\} = [H]^T \text{diag}\left(\frac{l}{tG}\right) \{q\} \quad \leftarrow \text{Non è stata una semplificazione}$$

e ricordando ancora che $[L]^T \{s_z\} = \{\Delta\}$ si ottiene,

$$\{\Delta\} = [H]^T \text{diag}\left(\frac{l}{tG}\right) \{q\} \quad \leftarrow \text{Formula operativa}$$

Esempio

Prendiamo la nostra solita sezione a 4 correnti su cui agisce un momento torcente M_z , andiamo a trovare le matrici:



$$\{L\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \{\hat{H}\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{q\} = \frac{M_z}{2ab} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

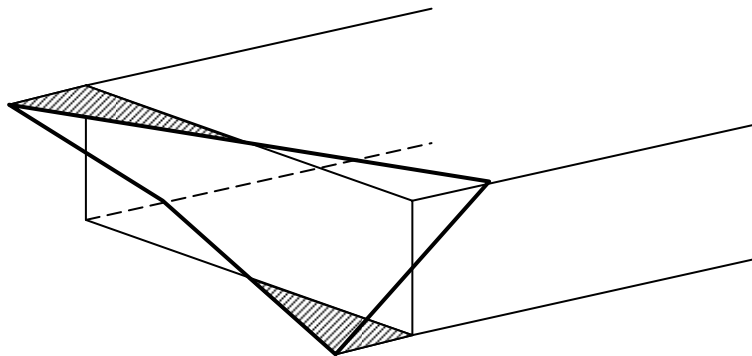
la matrice d'ingobbamento, in questo caso un valore scalare, sarà:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{tG} \text{diag}(a \quad b \quad a \quad b) \frac{M_z}{2ab} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{1}{Gt} \frac{M_z}{2ab} (2b - 2a) = \frac{M_z}{2Gt} \frac{b - a}{ab}$$

Se $a=b$, cioè se la sezione è quadrata, $\Delta=0$. Se $\Delta>0$, lo spostamento ha lo stesso segno di $[L]$. I correnti che fuoriescono dalla sezione sono quelli che determinano il passaggio da un pannello lungo ad un pannello corto, se percorriamo i pannelli nel verso di M_z .

Nella sezione quadrata i carichi e la forma presentano la stessa simmetria, rotazione di 90° . Una struttura simmetrica sottoposta a carichi simmetrici dà delle risposte simmetriche e consente di semplificare i modelli e i calcoli.

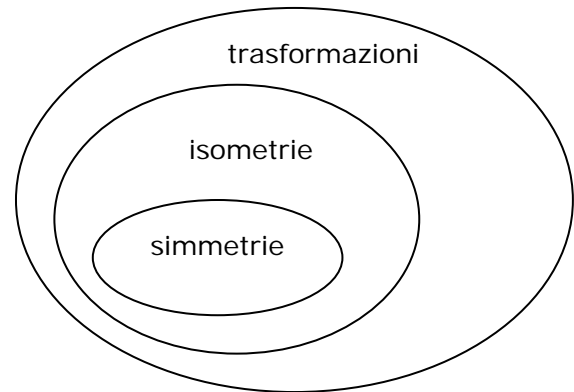


Simmetrie nelle strutture

Consideriamo l'insieme delle trasformazioni che portano punti in punti, cioè, figure geometriche in altre figure geometriche.

Le isometrie sono trasformazioni che non alterano la distanza tra i punti: si tratta di spostamenti rigidi (rotazioni e traslazioni) e di riflessioni. La riflessione non è uno spostamento ma solo una trasformazione.

Le simmetrie sono particolari isometrie che trasformano una figura in se stessa:



F trasformazione $F(I)=I \Rightarrow F$ è una simmetria
 I figura

Ogni figura ha un numero di simmetrie generalmente finito. Tra le trasformazioni isometriche ce ne sono alcune involutorie: la rotazione di 180° e la riflessione, queste due trasformazioni applicate due volte riproducono la figura iniziale, anche se non c'erano simmetrie.

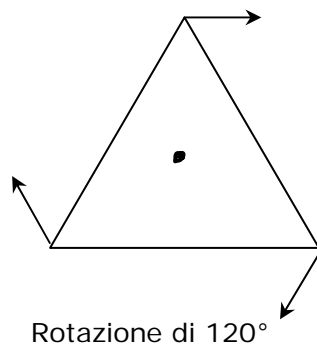
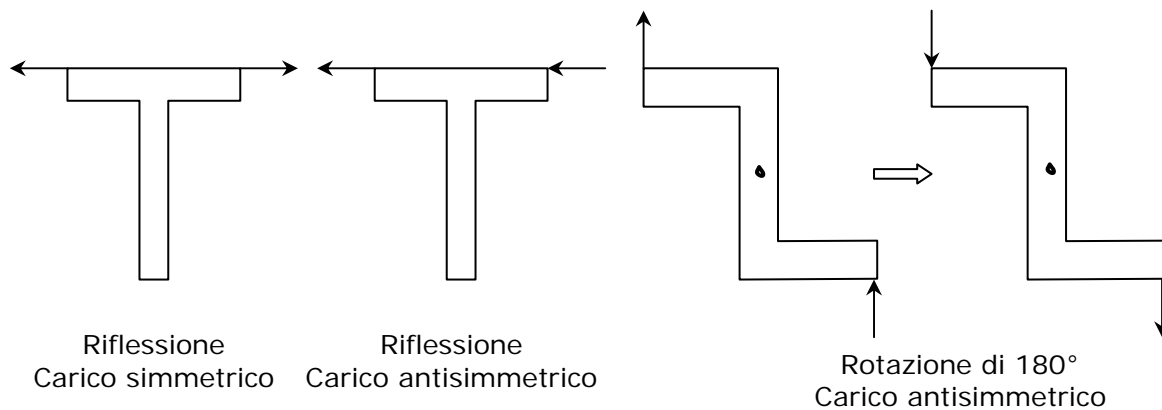
Strutture simmetriche: per definire la struttura dobbiamo dare non solo la geometria, ma anche le caratteristiche del materiale, e la simmetria deve valere anche per queste ultime, oltre che per la geometria.

Calcolo statico: vogliamo vedere come risponde la struttura a determinati input; gli input possono essere delle forze applicate alla struttura oppure spostamenti imposti dai vincoli, e sono ingenerale dei vettori; possono anche essere degli scalari se si considera ad esempio la temperatura o la variazione di temperatura rispetto ad un valore iniziale; gli input possono presentare delle simmetrie.

Vogliamo capire come sarà la risposta se la struttura e gli ingressi presentano la stessa simmetria. La risposta può essere fatta da spostamenti, sforzi o accelerazioni, quindi dei vettori o tensori doppi. La risposta è sempre simmetrica, perché se applichiamo alla struttura e agli input un'isometria dopo aver calcolato gli output, otteniamo la struttura e gli input iniziali, in quanto questi sono simmetrici per ipotesi, quindi i nuovi output saranno uguali ai precedenti, cioè gli output sono simmetrici.

Vediamo, invece, cosa succede se la struttura è simmetrica ma gli input sono antisimmetrici. Possiamo parlare di antisimmetria degli ingressi, perché ha senso cambiare segno a grandezze scalari e vettoriali, non avrebbe senso invece parlare di struttura antisimmetrica.

L'antisimmetria dei carichi è possibile solo per simmetrie della struttura dovute a trasformazioni involutorie, cioè riflessioni e rotazioni di 180° .



Non c'è modo di ottenere carichi antisimmetrici con rotazioni di 120°

Se la struttura è simmetrica e gli input sono antisimmetrici la risposta è antisimmetrica solo se il comportamento di tutta la struttura è lineare, cioè il materiale deve essere lineare e gli spostamenti infinitesimi.

Ad esempio, l'instabilità ha un comportamento non lineare: nell'asta sottoposta a trazione non c'è instabilità, se cambiamo segno alla trazione, cioè esercitiamo sull'asta una compressione, compare l'instabilità, quindi abbiamo una risposta del tutto diversa, e non antisimmetrica rispetto alla precedente.

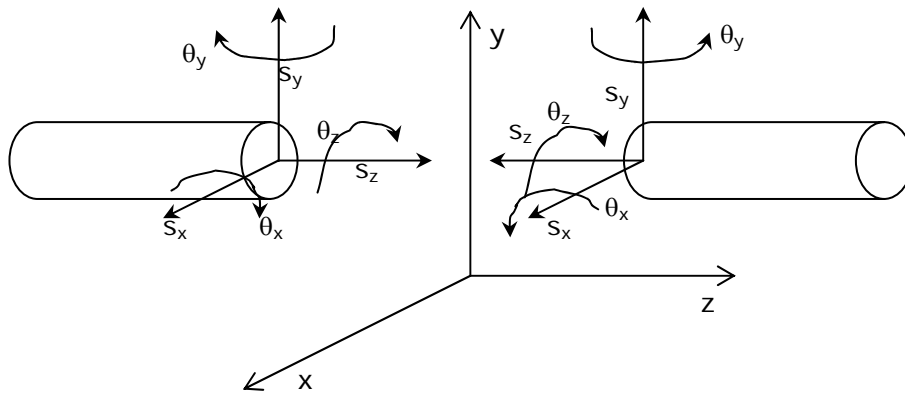
Anche i contatti hanno un comportamento non lineare.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{STRUTTURA SIMM.} \\ \text{INPUT SIMMETRICO} \end{array} \right.$	\Rightarrow	RISPOSTA SIMM. (<u>sempre</u>)
--------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------	----------------------------------

$\left\{ \begin{array}{l} \text{STRUTTURA SIMM.} \\ \text{INPUT ANTISIMM.} \end{array} \right.$	\Rightarrow	RISPOSTA ANTISIMM. (<u>solo se il comportamento è lineare o la simmetria viene da trasformazioni involutorie</u>)
-------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

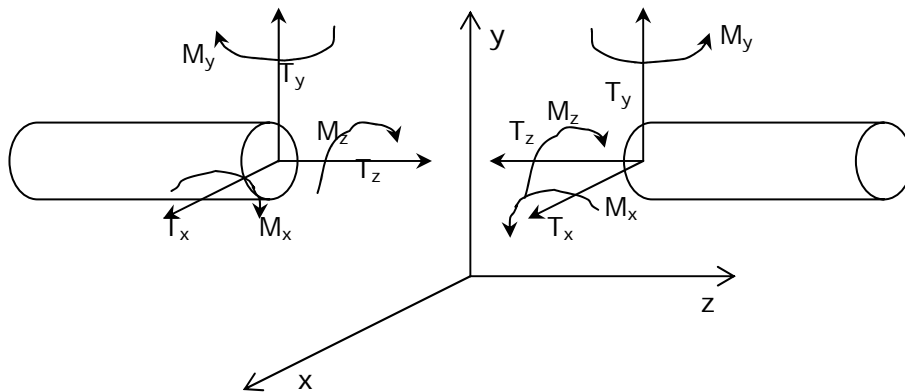
Supponiamo che xy sia il piano di simmetria:

1° caso: risposta simmetrica:



Gli spostamenti e le rotazioni in figura devono rispettare la simmetria e la congruenza. Sono stati già rappresentati in modo tale che siano già simmetrici, mi rimane solo di verificare la congruenza, quindi si ha:

$$s_z = 0 \quad \theta_x = \theta_y = 0$$



Le forze e i momenti devono rispettare la simmetria, e in figura lo sono già, e l'equilibrio, quindi si ha banalmente,

$$T_x = T_y = 0 \quad M_z = 0$$

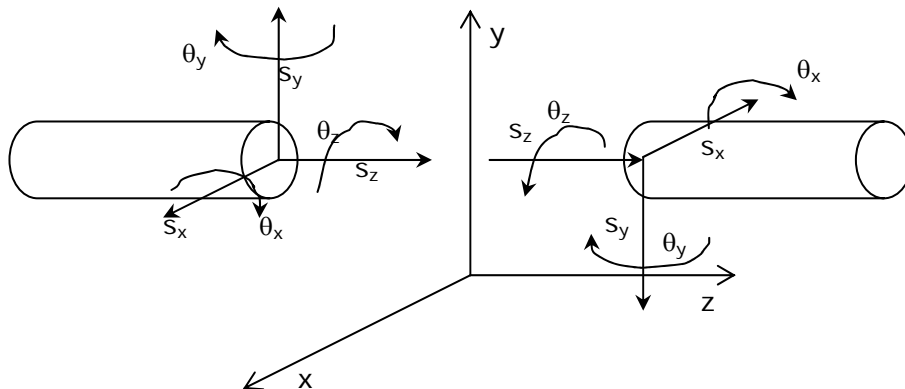
Si nota che, dove lo spostamento è nullo la forza è diversa da zero, se la forza è nulla lo spostamento è libero. Quindi sul piano di simmetria il lavoro è nullo perché è nullo o lo spostamento o la forza, quindi non c'è flusso di energia tra le due parti della struttura.

Se avessimo rappresentato momenti e rotazioni con dei vettori invece che con delle frecce curve, avremmo ottenuto un risultato diverso e sbagliato, perché

in realtà, un momento non è rappresentabile da una forza ma da una coppia di forze. Se usiamo un vettore, dobbiamo ricordare la convenzione della terna destra che con la riflessione diventa una terna sinistra e dovremmo tenere conto di ciò per avere il risultato corretto.

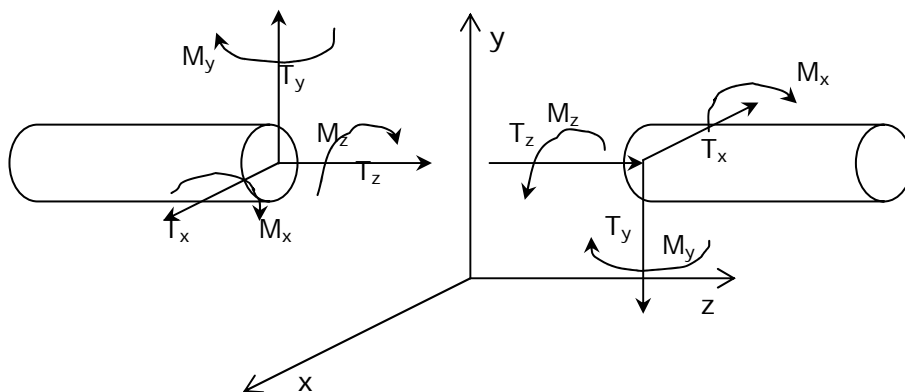
Momenti e rotazioni sono tensori doppi emisimmetrici, le componenti indipendenti sono 3 e possiamo rappresentarle con un vettore ricordando che non si tratta di un vettore qualsiasi ma di un vettore coniugato del tensore.

2° caso: risposta antisimmetrica:



Gli spostamenti e le rotazioni in figura devono rispettare l'antisimmetria e la congruenza. Sono stati già rappresentati in modo tale che siano già antisimmetrici, mi rimane solo di verificare la congruenza, quindi si ha:

$$s_x = s_y = 0 \quad \theta_z = 0$$



Le forze e i momenti devono rispettare l'antisimmetria, e in figura lo sono già, e l'equilibrio, quindi si ha banalmente,

$$T_z = 0 \quad M_x = M_y = 0$$

Lo studio della simmetria ci consente di trascurare metà struttura inserendo dei vincoli in corrispondenza degli spostamenti nulli e lasciando liberi gli spostamenti in corrispondenza delle forze nulle. In questo modo il calcolo diventa più rapido e preciso.

I modi di oscillazione della struttura sono simmetrici o antisimmetrici, usiamo vincoli di simmetria o antisimmetria a secondo che vogliamo determinare modi simmetrici e antisimmetrici, il calcolo dei modi si riduce al problema degli autovalori e autovettori.

Anche per l'instabilità dovuta al carico critico dobbiamo determinare autovalori ed autovettori, però non possiamo usare le simmetrie o le antisimmetrie, perché l'instabilità non rispetta l'eventuale simmetria e antisimmetria della struttura: prima del carico critico l'asta si accorcia e si dilata in maniera assialsimmetrica, ma raggiunto il carico critico sbanda, perdendo la simmetria fisica.

Dal punto di vista matematico non ci sono simmetrie perché il fenomeno non è lineare, quindi non ha senso parlare di simmetrie e antisimmetrie.

Si può sempre scomporre l'input in una parte simmetria e in una antisimmetrica:

$$\frac{1}{2}(I + F(I)) + \frac{1}{2}(I - F(I)) = I$$

$$F(I + F(I)) = F(I) + F(F(I)) = F(I) + I$$

$$F(I - F(I)) = F(I) - F(F(I)) = F(I) - I$$

Ciò permette di calcolare solo la metà della struttura: dai vincoli di simmetria e dalle forze simmetriche si ottiene una soluzione; dai vincoli di simmetria e dalle forze antisimmetriche si ottiene un'altra soluzione.

Sommando il risultato simmetrico e quello antisimmetrico si ottiene la soluzione relativa alla metà della struttura considerata. Facendo la differenza tra i due risultati si ottiene la soluzione della parte non calcolata.

Calcolo dei flussi di taglio dentro una sezione chiusa

Esempio 1

Prendiamo in considerazione una sezione chiusa a 4 correnti e 4 pannelli ($n=4$ e $m=4$). Possiamo calcolare subito le N_i azioni assiali tramite la formula,

$$N_i = \frac{T_z}{A} A_i + \frac{M_x}{J_x} S_{xi} - \frac{M_y}{J_y} S_{yi}$$

Per determinare i flussi di taglio q_j , applichiamo la sovrapposizione degli effetti. Rendiamo la struttura un albero, cioè la apriamo, e ci calcoliamo prima i flussi q'_j e poi l'unico, in questo caso, flusso q^* .

Scegliamo di aprire il pannello (4), quindi il flusso $q'_4=0$, adesso dall'equazione dei flussi sorgenti si ottiene:

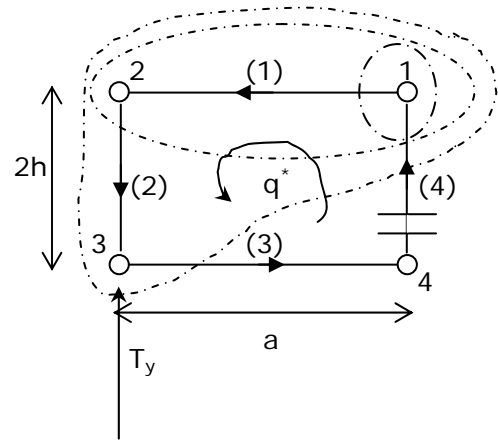
$$\varphi = -T_y \frac{S'_x}{J_x} - T_x \frac{S'_y}{J_y}$$

con $J_x = 4Ah^2$, si ha,

$$q'_1 = -\frac{T_y}{4Ah^2} (Ah) = -\frac{T_y}{4h}$$

$$q'_2 = -\frac{T_y}{4Ah^2} (2Ah) = -\frac{T_y}{2h}$$

$$q'_3 = -\frac{T_y}{4Ah^2} (2Ah - Ah) = -\frac{T_y}{4h}$$



Andiamo a verificare che i flussi trovati sono equivalenti a T_y . Si vede subito che i flussi danno reazioni:

$$R_x = \frac{T_y}{4h} a - \frac{T_y}{4h} a = 0 \quad R_y = \frac{T_y}{2h} 2h = T_y$$

l'equilibrio alla traslazione è verificato.

Dobbiamo verificare l'equivalenza alla rotazione rispetto ad un polo arbitrario. Scegliamo come polo il corrente 4, ed utilizzando la formula:

$$M_{ext(0)} = \sum_{i=1}^n 2q'_i \Omega_{0i} + \sum_{k=1}^N 2q_k^* \Omega_k$$

si ha:

$$M_{ext(4)} = -T_y a \quad \Omega_{01} = ah \quad \Omega_{02} = ah \quad \Omega_{03} = \Omega_{04} = 0 \quad \Omega = 2ah$$

Ricordiamo che le aree sono dotate di segno, nel senso che, percorrendo il pannello nel verso positivo di q l'area è percorsa nel verso positivo delle rotazioni quindi la consideriamo positiva, se invece è percorsa in verso opposto alle rotazioni la consideriamo negativa.

Invece di considerare le aree dotate di segno possiamo ricavare il segno dei momenti dai versi dei flussi q .

$$-T_y a = 2 \left(-\frac{T_y}{4h} \right) ah + 2 \left(-\frac{T_y}{2h} \right) ah + 0 + 0 + 2q^* 2ah$$

$$q^* = \frac{T_y}{8h}$$

questo mi permette di scrivere i flussi della sezione chiusa:

$$q_1 = q'_1 + q^* = -\frac{T_y}{4h} + \frac{T_y}{8h} = -\frac{T_y}{8h}$$

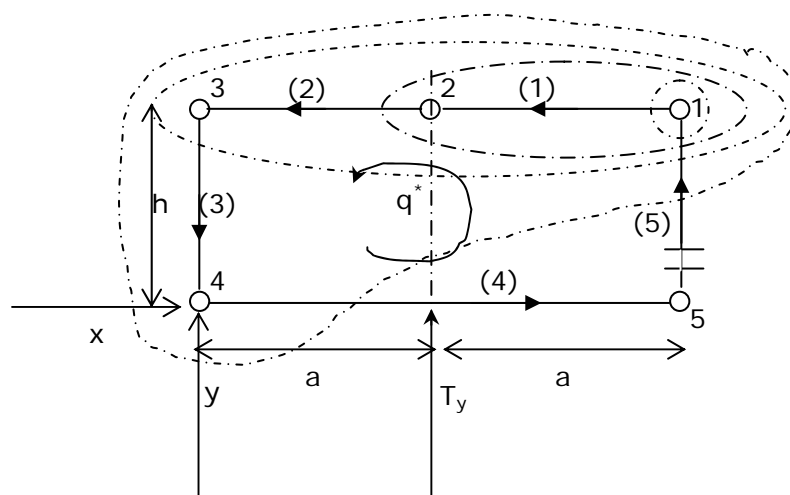
$$q_2 = q'_2 + q^* = -\frac{T_y}{2h} + \frac{T_y}{8h} = -\frac{3T_y}{8h}$$

$$q_3 = q'_3 + q^* = -\frac{T_y}{4h} + \frac{T_y}{8h} = -\frac{T_y}{8h}$$

$$q_4 = q^* = \frac{T_y}{8h}$$

Esempio 2

La struttura è composta da 5 correnti e 5 pannelli, rettangolare, e scegliamo di tagliare il pannello 5, in modo da avere $q'_5 = 0$:



La prima cosa da fare è calcolare il baricentro e il momento J_x , dato che la sezione questa volta non è simmetrica rispetto ai due assi:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{Aa + 4Aa}{5A} = a \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{3Aa}{5A} = \frac{3}{5}a$$

$$J_x = \sum_{i=1}^n A_i x_i^2 = 3A \left(\frac{2}{5}h \right)^2 + 2A \left(\frac{3}{5}h \right)^2 = \frac{6}{5}Ah^2$$

La sezione comunque resta simmetrica rispetto all'asse y , ora tramite l'equazione dei flussi sorgenti, scriviamoci i valori dei flussi di taglio della sezione aperta:

$$\begin{aligned} q'_1 &= -\frac{5}{6} \frac{T_y}{Ah^2} \left(\frac{2}{5}Ah \right) = -\frac{1}{3} \frac{T_y}{h} \\ q'_2 &= -\frac{5}{6} \frac{T_y}{Ah^2} \left(2 \frac{2}{5}Ah \right) = -\frac{2}{3} \frac{T_y}{h} \\ q'_3 &= -\frac{5}{6} \frac{T_y}{Ah^2} \left(3 \frac{2}{5}Ah \right) = -\frac{T_y}{h} \\ q'_4 &= -\frac{5}{6} \frac{T_y}{Ah^2} \left(3 \frac{2}{5}Ah - \frac{3}{5}Ah \right) = -\frac{1}{2} \frac{T_y}{h} \end{aligned}$$

Scegliamo il polo 3 per l'equivalenza dei momenti, si ottiene,

$$M_{ext(3)} = T_y a \quad \Omega_{01} = \Omega_{02} = \Omega_{03} = 0 \quad \Omega_{04} = ah \quad \Omega_{05} = ah \quad \Omega = 2ah$$

$$\begin{aligned} M_{ext(3)} &= 2q'_4 \Omega_{04} + 2q^* \Omega \\ T_y a &= 2 \left(-\frac{1}{2} \frac{T_y}{h} \right) ah + 2q^* 2ah \end{aligned}$$

$$q^* = \frac{1}{2} \frac{T_y}{h}$$

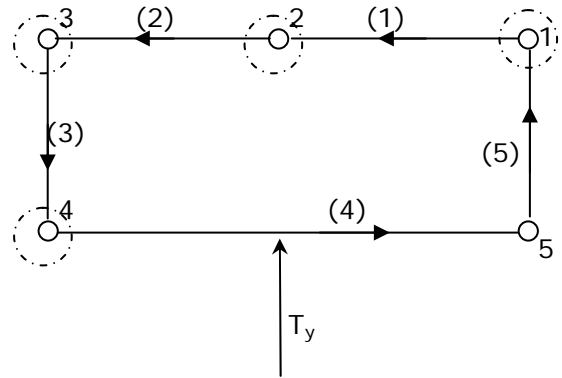
i flussi della sezione chiusa diventano:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= q'_1 + q^* = -\frac{T_y}{3h} + \frac{T_y}{2h} = \frac{T_y}{6h} \\
 q_2 &= q'_2 + q^* = -\frac{2T_y}{3h} + \frac{T_y}{2h} = -\frac{T_y}{6h} \\
 q_3 &= q'_3 + q^* = -\frac{T_y}{h} + \frac{T_y}{2h} = -\frac{T_y}{2h} \\
 q_4 &= q'_4 + q^* = -\frac{T_y}{2h} + \frac{T_y}{2h} = 0 \\
 q_5 &= q^* = \frac{T_y}{2h}
 \end{aligned}$$

Si noti come la sezione, essendo simmetrica rispetto all'asse y, ha flussi di taglio simmetrici, quindi il q_4 risulta nullo. Verifichiamo l'equivalenza alle traslazioni:

$$\begin{cases}
 R_x = q_1 a + q_2 a - q_4 2a = \frac{T_y}{6h} a - \frac{T_y}{6h} a = 0 \\
 R_y = q_5 h - q_3 h = \frac{T_y}{2h} h - \left(-\frac{T_y}{2h}\right) h = T_y
 \end{cases}$$

Il metodo usato, cioè la scelta di tagliare un pannello e scegliere le linee chiuse che lo attraversano, non è l'unico possibile. Infatti, possiamo prendere la linea di controllo che tiene al suo interno un solo corrente, in questo modo l'equazione che si ottiene, ha sempre due incognite, il flusso entrante e quello uscente:



$$q_1 - q_5 = -T_y \frac{S_{x1}}{J_x} \quad q_2 - q_1 = -T_y \frac{S_{x2}}{J_x} \quad q_3 - q_2 = -T_y \frac{S_{x3}}{J_x} \quad q_4 - q_3 = -T_y \frac{S_{x4}}{J_x}$$

a queste equazioni si aggiunge la solita dell'equivalenza dei momenti,

$$2q_1 \Omega_{01} + 2q_2 \Omega_{02} + 2q_3 \Omega_{03} + 2q_4 \Omega_{04} + 2q_5 \Omega_{05} = M_{ext}$$

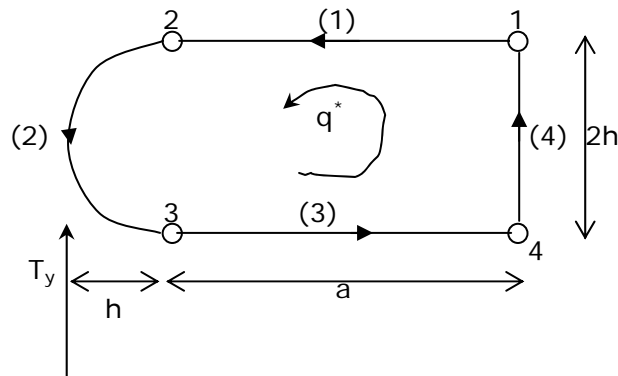
e possiamo scrivere le equazioni in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2\Omega_{01} & 2\Omega_{02} & 2\Omega_{03} & 2\Omega_{04} & 2\Omega_{05} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -T_y \frac{S_{x1}}{J_x} \\ -T_y \frac{S_{x2}}{J_x} \\ -T_y \frac{S_{x3}}{J_x} \\ -T_y \frac{S_{x4}}{J_x} \\ M_{ext} \end{Bmatrix}$$

Il metodo descritto è semplice da scrivere, ma non lo è altrettanto da risolvere a mano, perché le equazioni sono accoppiate, l'altro metodo invece è risolvibile perché ogni equazione contiene una sola incognita (!!!questo metodo fa perdere di vista il risultato, perché dimentichiamo di fare le verifiche!!!).

Esempio 3

Abbiamo una struttura così fatta:



Scegliamo di tagliare il pannello 4, quindi $q'_4=0$.

Il momento d'inerzia sarà $J_x = 4Ah^2$, i q' non risentono della forma dei pannelli, ma solo dalla variazione dei momenti statici. Dall'equazione dei flussi sorgenti si ha:

$$\begin{aligned} q'_1 &= -\frac{T_y}{4Ah^2}(Ah) = -\frac{T_y}{4h} \\ q'_2 &= -\frac{T_y}{4Ah^2}(2Ah) = -\frac{T_y}{2h} \\ q'_3 &= -\frac{T_y}{4Ah^2}(2Ah - Ah) = -\frac{T_y}{4h} \end{aligned}$$

l'equivalenza ai momenti ci dà:

$$M_{ext(4)} = -T_y(a+h) \quad \Omega_{01} = ah \quad \Omega_{02} = ah + \frac{\pi h^2}{2} \quad \Omega_{03} = \Omega_{04} = 0 \quad \Omega = 2ah + \frac{\pi h^2}{2}$$

$$-T_y(a+h) = 2\left(-\frac{T_y}{4h}\right)ah + 2\left(-\frac{T_y}{2h}\right)\left(\frac{\pi h^2}{2} + ah\right) + 2q^*\left(\frac{\pi h^2}{2} + 2ah\right)$$

$$q^* = \frac{T_y(a+h(\pi-2))}{2(4a+\pi h)}$$

i flussi di taglio della sezione chiusa saranno:

$$q_1 = q'_1 + q^* = -\frac{T_y}{4h} + \frac{T_y(a+h(\pi-2))}{2(4a+\pi h)}$$

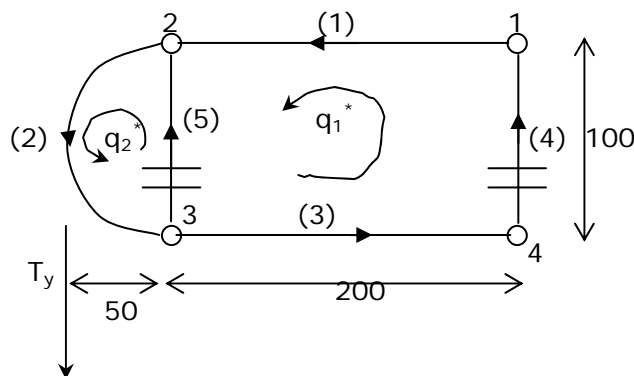
$$q_2 = q'_2 + q^* = -\frac{T_y}{2h} + \frac{T_y(a+h(\pi-2))}{2(4a+\pi h)}$$

$$q_3 = q'_3 + q^* = -\frac{T_y}{4h} + \frac{T_y(a+h(\pi-2))}{2(4a+\pi h)}$$

$$q_4 = q^* = \frac{T_y(a+h(\pi-2))}{2(4a+\pi h)}$$

Esempio 4

Prendiamo questa volta una sezione a due celle così fatta:



La sezione è simmetrica, per quanto riguarda i correnti, i dati sono:

$$A = 350 \text{ mm}^2 \quad T_y = 500 \text{ kg} \quad t = 1.2 \text{ mm}$$

Essendo simmetrica, la sezione presenta il baricentro nel centro della cella rettangolare. Il momento d'inerzia sarà $J_x = 4Ay^2 = 3.5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$. Tagliamo i

pannelli 4 e 5, quindi si avrà che $q'_4 = q'_5 = 0$, dall'equazione dei flussi sorgenti otteniamo:

$$q'_1 = -\frac{-500}{3.5 \cdot 10^6} (50 \cdot 350) = 2.5 \text{ kg/mm}$$

$$q'_2 = -\frac{-500}{3.5 \cdot 10^6} (2 \cdot 50 \cdot 350) = 5 \text{ kg/mm}$$

$$q'_3 = -\frac{-500}{3.5 \cdot 10^6} (50 \cdot 350) = 2.5 \text{ kg/mm}$$

Adesso andiamo ad eguagliare i momenti torcenti, scegliendo come polo il corrente 3:

$$M_{ext} = \sum_{i=1}^n 2q'_i \Omega_{0i} + \sum_{k=1}^N 2q_k^* \Omega_k$$

$$M_{ext(3)} = 25000 \quad \Omega_{01} = 10000 \quad \Omega_{02} = 3927 \quad \Omega_{03} = 0 \quad \Omega_1 = 20000 \quad \Omega_2 = 3927$$

Le due aree Ω_{04} e Ω_{05} non c'interessano al calcolo, poiché i flussi di taglio passanti per i rispettivi pannelli sono nulli. Infine si ottiene,

$$5.09q_1^* + q_2^* = -8.183$$

Quest'equazione contiene due incognite, quindi bisogna trovare un'altra condizione. Questa ulteriore condizione, è data dalla congruenza delle due celle:

$$\dot{\theta}_k = \frac{1}{2G\Omega_k} \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} \frac{q_i l_i}{t_i}$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{1}{2G\Omega_1 t} (200q_1 - 100q_5 + 200q_3 + 100q_4) = \frac{1}{2G\Omega_1 t} [200(q'_1 + q_1^*) - 100(q_2^* - q_1^*) + 200(q'_3 + q_1^*) + 100q_1^*]$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{2G\Omega_1 t} (600q_1^* - 100q_2^* + 1000)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{1}{2G\Omega_2 t} (\pi \cdot 50q_2 + 100q_5) = \frac{1}{2G\Omega_2 t} [157(q'_2 + q_2^*) + 100(q_2^* - q_1^*)] = \frac{1}{2G\Omega_2 t} (257q_2^* - 100q_1^* + 785)$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 \Rightarrow 217.81q_1^* - 276.63q_2^* = 588.65$$

Quest'ultima equazione messa a sistema con quella trovata dai momenti ci dà:

$$q_1^* = -1.03 \quad q_2^* = -2.94$$

$$q'_1 = -\frac{8000}{3 \cdot 10^6} (40 \cdot 250) = -26.67 \text{ kg/mm}$$

$$q'_2 = -\frac{8000}{3 \cdot 10^6} (2 \cdot 40 \cdot 250) = -53.33 \text{ kg/mm}$$

$$q'_3 = -\frac{8000}{3 \cdot 10^6} (3 \cdot 40 \cdot 250) = -80 \text{ kg/mm}$$

$$q'_4 = -\frac{8000}{3 \cdot 10^6} (3 \cdot 40 \cdot 250 - 60 \cdot 250) = -40 \text{ kg/mm}$$

Adesso andiamo ad eguagliare i momenti torcenti, scegliendo come polo il corrente 2:

$$M_{ext} = \sum_{i=1}^n 2q'_i \Omega_{0i} + \sum_{k=1}^N 2q_k^* \Omega_k$$

$$M_{ext(2)} = 0 \quad \Omega_{01} = \Omega_{02} = 0 \quad \Omega_{03} = 5000 \quad \Omega_{04} = 5000 \quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 5000$$

Le aree Ω_{05} , Ω_{06} e Ω_{07} non c'interessano al calcolo, poiché i flussi di taglio passanti per i rispettivi pannelli sono nulli. Infine si ottiene,

$$q_1^* + q_2^* + q_3^* = 120$$

A questa equazione vanno aggiunte le due date dalla congruenza delle tre celle:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{1}{2G\Omega_1 t} (100q_1 + 111.8q_3 + 111.8q_6) = \frac{1}{2G\Omega_1 t} [100(q'_2 + q_1^*) + 111.8(q'_3 + q_1^*) + 111.8(q_1^* - q_2^*)]$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{1}{2G\Omega_1 t} (323.6q_1^* - 111.8q_2^* - 14277.4)$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{1}{2G\Omega_2 t} (111.8q_7 - 111.8q_6 + 100q_4) = \frac{1}{2G\Omega_2 t} [111.8(q_2^* - q_3^*) - 111.8(q_1^* - q_2^*) + 100(q_2^* + q_4^*)]$$

$$\dot{\theta}_2 = \frac{1}{2G\Omega_2 t} (-111.8q_1^* + 323.6q_2^* - 111.8q_3^* - 4000)$$

$$\dot{\theta}_3 = \frac{1}{2G\Omega_3 t} (100q_1 - 111.8q_7 + 111.8q_5) = \frac{1}{2G\Omega_3 t} (100(q'_1 + q_3^*) - 111.8(q_2^* - q_3^*) + 111.8q_3^*)$$

$$\dot{\theta}_3 = \frac{1}{2G\Omega_3 t} (-111.8q_2^* + 323.6q_3^* - 2666.7)$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_3 \Rightarrow 323.6q_1^* - 323.6q_3^* = 11610.7$$

$$\dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_2 \Rightarrow 111.8q_1^* - 435.4q_2^* + 435.4q_3^* = -1333.3$$

E dal sistema delle tre equazioni ottenute, si ha:

$$q_1^* = 57.93 \quad q_2^* = 40.02 \quad q_3^* = 22.05$$

I flussi di taglio della sezione chiusa saranno:

$$q_1 = q_1' + q_3^* = -4.61$$

$$q_2 = q_2' + q_1^* = 4.59$$

$$q_3 = q_3' + q_1^* = -22.07$$

$$q_4 = q_4' + q_2^* = 0.02$$

$$q_5 = q_3^* = 22.05$$

$$q_6 = q_1^* - q_2^* = 17.91$$

$$q_7 = q_2^* - q_3^* = 17.97$$

Si noti come dalla simmetria della sezione si ha che:

$$q_4 \cong 0 \quad q_1 \cong q_2 \quad q_3 \cong q_5 \quad q_6 \cong q_7$$

Infine andiamo a verificare le risultanti agenti sulla sezione:

$$\begin{cases} R_x = 100q_1 + 100q_2 - 50q_3 - 100q_4 - 50q_6 + 50q_7 - 50q_5 = 0 \\ R_y = 100q_5 + 100q_7 + 100q_6 - 100q_3 = 8000 \text{ kg} \end{cases}$$

I Diaframmi

Nello schema a semiguscio i pannelli sopportano delle sollecitazioni tangenziali τ , mentre i correnti solo delle sollecitazioni assiali σ . Un terzo elemento da considerare è il diaframma:

- Mantengono la forma della sezione (rigidezza nel piano).
- Introducono nei pannelli i carichi esterni concentrati e distribuiti.
- Diminuiscono la lunghezza libera di flessione dei correnti per ridurre i problemi di instabilità.

Possiamo applicare ai diaframmi lo schema a travi, e lo schema a semiguscio. I fori del diaframma sono imbutiti per dare rigidezza flessionale, e i bordi sono ripiegati per permettere la chiodatura dei pannelli.

Per le centine, i diaframmi dell'ala, possiamo anche usare la travatura reticolare. Usiamo la struttura forata se lo spessore percentuale è piccolo (eventualmente eliminando i fori), se lo spessore è elevato questa struttura risulterebbe troppo cedevole fuori dal piano, quindi usiamo la travatura reticolare.

Le ordinate, i diaframmi della fusoliera, non possono avere una travatura reticolare perché al loro interno deve passare il carico pagante, quindi presentano la struttura forata con le piegature esterne per la chiodatura e quelle interne per la rigidezza.

Se abbiamo un carico concentrato, per esempio un motore appeso sotto l'ala, dobbiamo considerare le sue azioni (trazione e peso) e inserirle direttamente sulla centina cui è collegato.

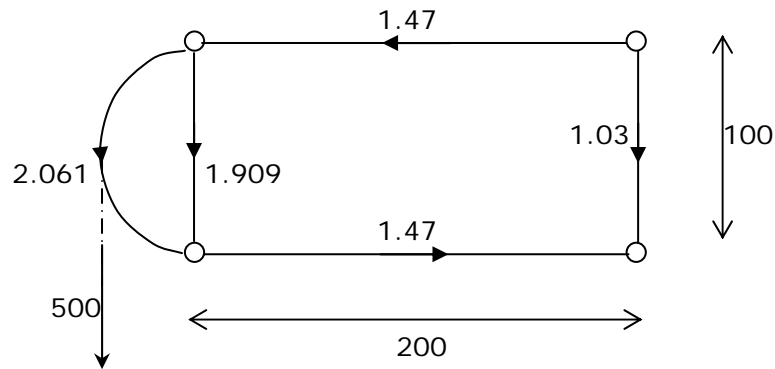
Sull'ordinata dobbiamo mettere i carichi trasmessi dai pannelli, l'ordinata è una struttura labile perché non è vincolata ed è sottoposta a carichi con risultante non nulla.

In realtà l'ordinata è tenuta ferma dai pannelli. Determinando sui pannelli i flussi equivalenti ai carichi esterni, sull'ordinata questi flussi cambiano segno, cioè diventano equilibranti dei carichi esterni, quindi l'ordinata è in equilibrio.

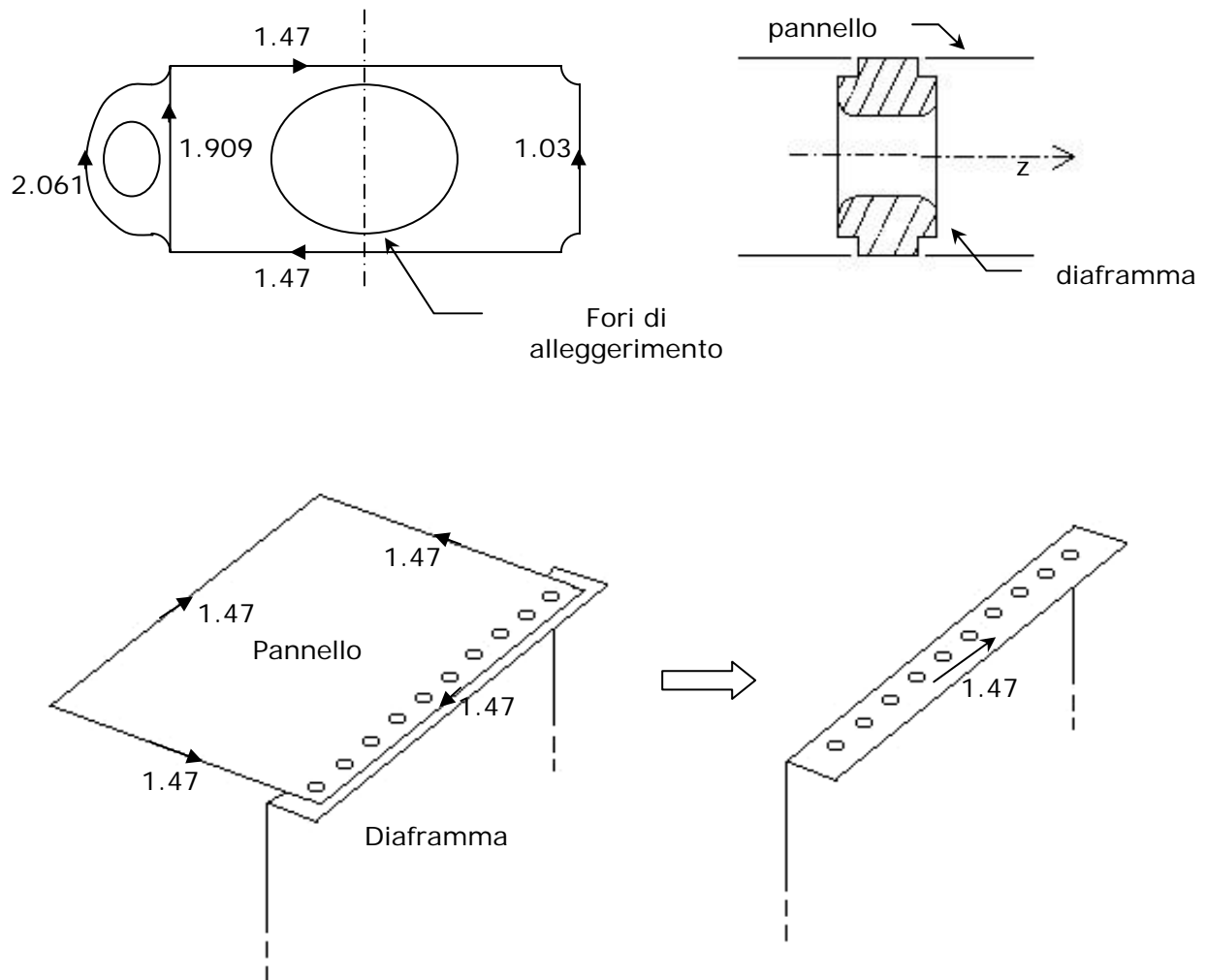
Il diaframma viene studiato libero nello spazio, cioè viene portato fuori dal resto della struttura, ma non si muove, pur essendo labile, perché tutte le forze agenti sono in equilibrio. Lo studio consiste in:

1. Individuare i carichi esterni.
2. Calcolare i flussi q nei pannelli.
3. Inserire i flussi $-q$ sul diaframma e verificare che siano in equilibrio con i carichi esterni.

Vediamo un esempio di calcolo di diaframmi; nel seguente esempio ci riferiamo ad un tipo di sezione nota e dalla quale diamo, senza dimostrare, i flussi equivalenti al carico applicato:



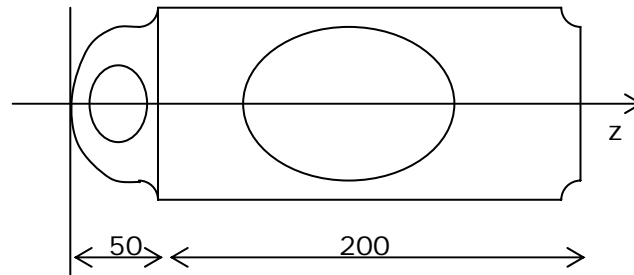
Sul diaframma avremo i corrispondenti flussi equilibrati:



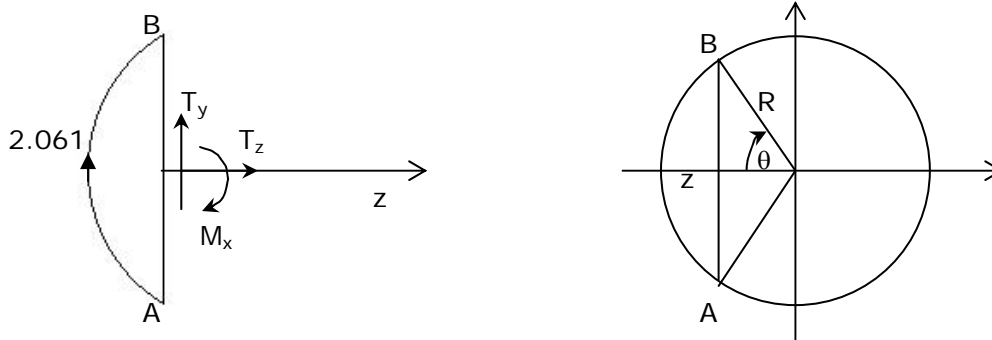
Cioè, i carichi sono trasferiti dal diaframma al pannello attraverso gli sforzi nelle giunzioni, cioè attraverso le forze concentrate nei chiodi.

A questo punto, è possibile andare a calcolare le azioni interne nel diaframma trattandolo alla stregua di una trave isostatica (della quale si possono calcolare

le azioni interne senza fra entrare in gioco le proprietà geometriche e di deformabilità della stessa):



Cominciamo a considerare le azioni interne nella prima porzione di trave ($0 \leq z \leq 50$):



$$T_y = -2.061 \cdot AB = -2.061 \cdot 2\sqrt{R^2 - (R-z)^2}$$

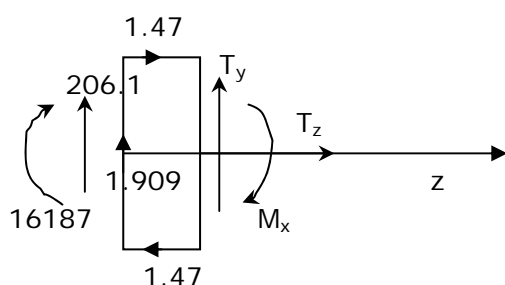
in particolare $T_y(0) = 0$ e $T_y(50) = -206.1$.

$$T_z = 0$$

$$M_x = -2 \cdot 2.061 \cdot \Omega$$

Area del settore circolare di angolo 2θ

con $\Omega = \theta R^2 - (R-z)\sqrt{R^2 - (R-z)^2}$, in particolare si ha $M_x(0) = 0$ e $M_x(50) = -16187$. Consideriamo ora il tratto finale, cioè $50 \leq z \leq 250$:



$$T_y = -206.1 - 1.909 \cdot 100 = -397$$

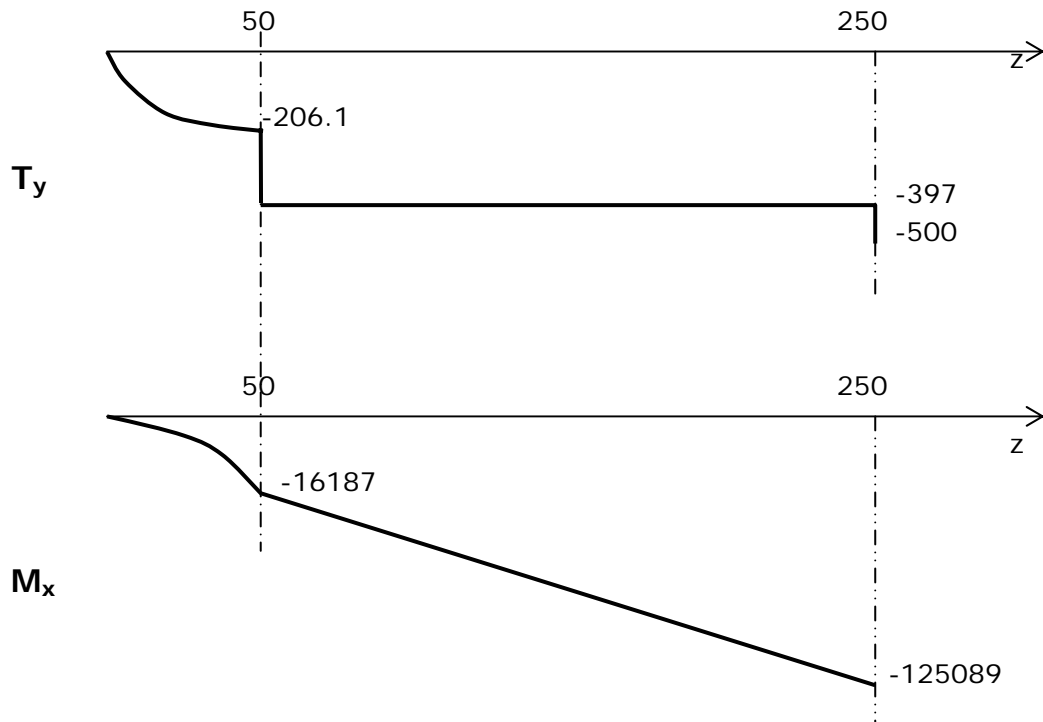
$$T_z = 1.47 - 1.47 = 0$$

$$M_x = -16187 - 206.1z' - 1.909 \cdot 100z' - 2 \cdot 2 \cdot 1.47 \frac{50}{2} z'$$

in particolare si ha, $M_x(0) = -16187$ e $M_x(200) = -125089$.

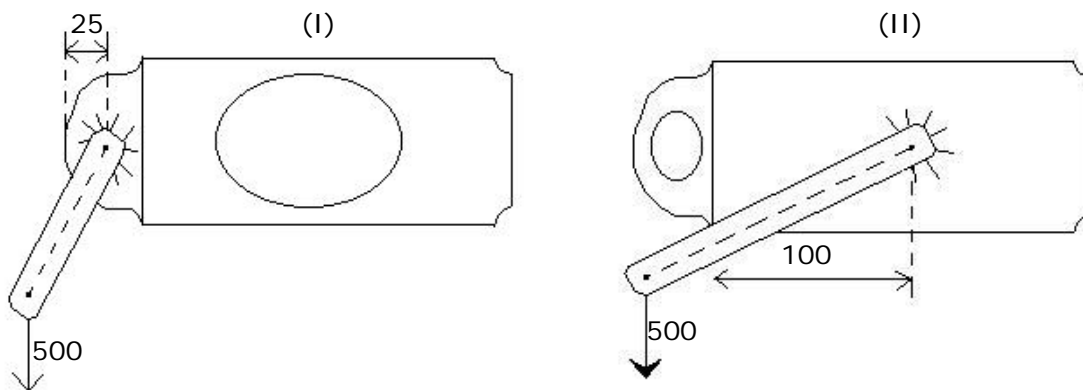
I diagrammi delle azioni interne sono,

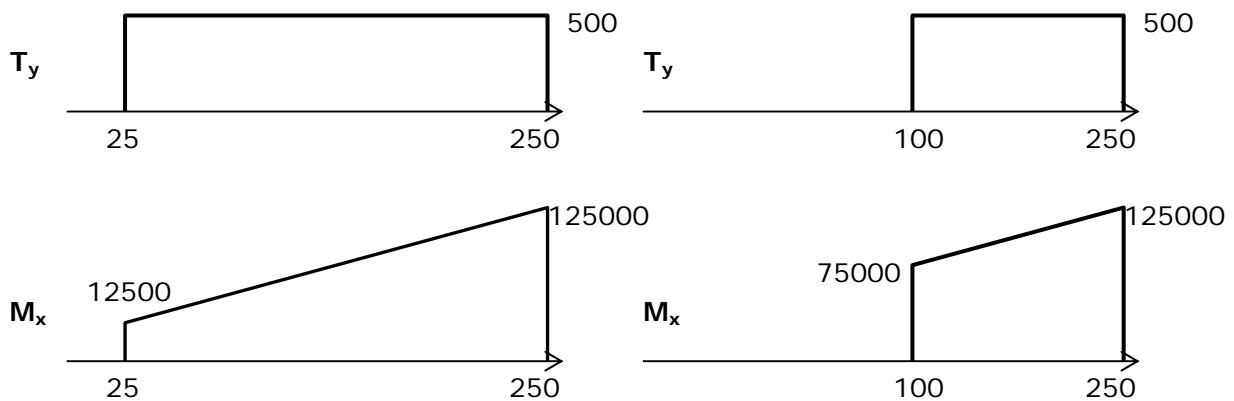
approssimativamente:



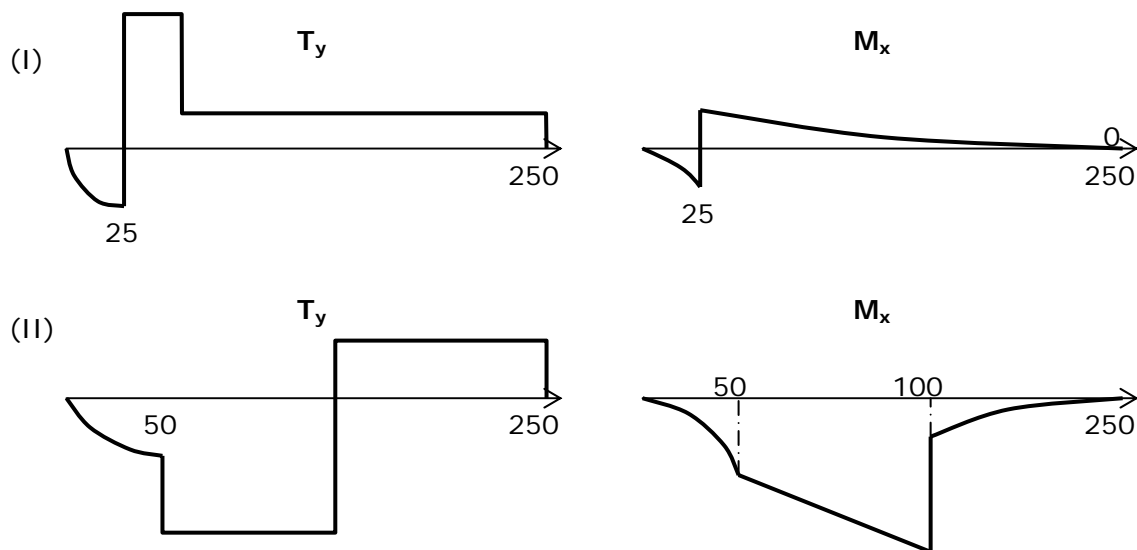
Oltre la quota $z=250$ non abbiamo altre parti del diaframma, quindi per mantenere in equilibrio tutta la struttura dovremmo applicare dall'esterno, sulla sezione finale, dei carichi che siano in equilibrio con le azioni interne risultanti. Il valore del taglio dopo la discontinuità finale, che realizza l'equilibrio è dunque: $(-379 - 103 \cdot 100 = -500)$.

Bisogna però sovrapporre, a questi diagrammi, quelli derivati dall'introduzione del carico esterno (il diaframma è in equilibrio, rispetto al carico applicato, grazie ai flussi equilibranti). Il problema che nasce, però, a questo punto è che si deve specificare la modalità d'applicazione del carico:





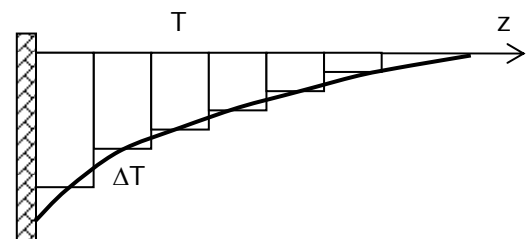
I diagrammi effettivi saranno dati dalla sovrapposizione dei diagrammi delle azioni interne relative ai flussi equilibranti (i primi che abbiamo calcolato) con i diagrammi delle azioni interne equilibranti rispetto ai carichi applicati:



Abbiamo visto come inserire dei carichi esterni concentrati, andiamo adesso a vedere lo stesso procedimento per dei carichi distribuiti.

Sappiamo che q è costante lungo lo spessore t del pannello, lungo la lunghezza l del pannello, ma anche lungo l'apertura z dell'ala, quindi il taglio dovrebbe essere lineare, invece risulta parabolico.

In realtà il diagramma non è né continuo né parabolico ma è a scalini, perché tra i due diagrammi q è costante per la presenza del



pannello, ma i due pannelli hanno diversi valori di q , quindi in corrispondenza del diaframma posto tra di essi si ha un salto finito di q e quindi un salto finito del taglio.

Il salto nel diaframma è $\Delta q = q_2 - q_1$, dal diagramma del taglio ricaviamo il ΔT in corrispondenza di un diaframma e quindi il Δq (il ΔT lo usiamo come se fosse un carico).

La spaziatura dei diaframmi viene fatta in modo tale che tutti abbiano lo stesso salto di taglio (in questo modo possiamo dare a tutti i diaframmi le stesse dimensioni).

Nel caso di pannelli e correnti approssimiamo il diagramma di M_x come una serie di tratti lineari.

Percorso delle forze lungo la struttura:

- La pressione agisce direttamente sul pannello (che è la parte più esterna della struttura) ed esercita su di esso degli sforzi membranali (risucchio dovuto alla depressione tra il dorso e il ventre).
- Il pannello trasferisce questi sforzi al diaframma, e il diaframma agli altri pannelli. Nel pannello ci sono quindi non solo gli sforzi τ , ma anche le σ che nello schema a semiguscio venivano trascurate, perché concentrate nei correnti, mentre lo schema a guscio prende in considerazione anche le σ , e il fenomeno non viene più trascurato.

Il diagramma a scalini potrebbe sembrare un'approssimazione fatta ad arte per far funzionare lo schema a semiguscio. Questo schema però, non è tanto lontano dalla realtà, infatti, se la trave fosse infinitamente diaframmata (cioè la distanza tra i diaframmi fosse infinitesima) il diagramma effettivo, che è a scalini, seguirebbe un andamento continuo, quindi sarebbe quello effettivamente teorico.

In ogni caso il diagramma a scalini è la reale rappresentazione dei flussi e delle azioni interne.

Scelta fra Centro di Taglio e Baricentro

Come si è già avuto modo di osservare, il movimento della trave è dato da due contributi:

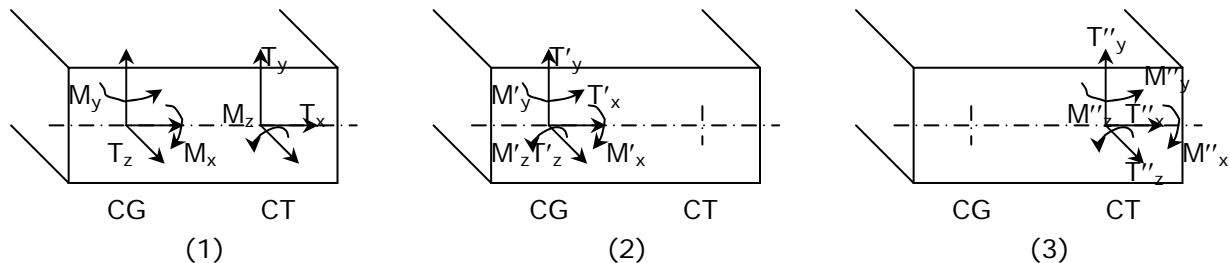
- Il movimento flessionale attorno agli assi principali d'inerzia,
- Il movimento torsionale attorno al centro di taglio.

Riprendiamo l'espressione del generico lavoro di deformazione di una trave:

$$\delta L_d = \int_0^l \left(\underbrace{\frac{T_z T'_z}{EA} + \frac{M_x M'_x}{EJ_x} + \frac{M_y M'_y}{EJ_y}}_{\text{Azioni scritte nel sistema degli assi principali d'inerzia (baricentro)}} + \underbrace{\frac{T_x T'_x}{GA_x^*} + \frac{T_y T'_y}{GA_y^*} + \frac{M_z M'_z}{GJ_t}}_{\text{Azioni scritte nel sistema del centro di taglio}} \right) dz$$

Alcuni termini si trascurano a seconda delle ipotesi semplificative fatte (trave snella, rigidità assiale molto elevata rispetto a quella flessionale, ...).

Comunque ci ritroviamo con due assi distinti sulla sezione: il luogo dei baricentri e il luogo dei centri di taglio. Vediamo che errori si commettono scegliendo un asse piuttosto che l'altro.



I tre sistemi sono equivalenti perché fanno equilibrio agli stessi carichi esterni, quindi hanno stesso risultante ma azioni interne diverse singolarmente. Ma se passiamo da un sistema all'altro cosa succede?

Scriviamo l'equivalenza tra il sistema (1) e il (2):

$$\begin{cases} T_x = T'_x \\ T_y = T'_y \\ T_z = T'_z \end{cases} \quad \begin{cases} M_x = M'_x \\ M_y = M'_y \\ M_z + T_y d = M'_z \end{cases}$$

ci si accorge che si valuta in modo errato la torsione, in modo tanto più marcato quanto più lontani sono il baricentro e il centro di taglio, ma soprattutto quanto più elevato è T_y .

Dato che nelle travi aeronautiche la torsione gioca un ruolo fondamentale e T_y assume valori consistenti, è chiaro che una soluzione di questo tipo è del tutto inaccettabile.

Passiamo ora a scrivere l'equivalenza tra i sistemi (1) e (3):

$$\begin{cases} T_x = T''_x \\ T_y = T''_y \\ T_z = T''_z \end{cases} \begin{cases} M_x = M''_x \\ M_y + T_z d = M''_y \\ M_z = M''_z \end{cases}$$

questa volta si sbaglia a calcolare la flessione di una quantità che dipende dall'azione assiale. Poiché nell'ala T_z è spesso nulla (tranne che in manovra, quando agiscono forze centrifughe), questa soluzione è la più corretta per le strutture aeronautiche¹.

È importante osservare che, anche adottando questa semplificazione, i momenti d'inerzia nelle formule per il lavoro di deformazione vanno sempre riferiti al sistema degli assi principali d'inerzia.

Notiamo che i tagli sono sempre corretti in qualunque schema, quindi per calcolarli ci basta prendere un sistema di riferimento con assi paralleli agli assi principali d'inerzia.

Il contributo torsionale del lavoro di deformazione, può essere sfruttato per determinare dei dati geometrici della nostra trave.

Infatti, se supponiamo di applicare solo il taglio T_x , da questo riusciamo a trovare i flussi di taglio della sezione dovuti solo a T_x :

$$\delta L_d = \int_0^l \frac{T_x T'_x}{GA_x^*} dz = \int_0^l \left(\sum_{j=1}^m \frac{q_{j,T_x} q'_{j,T_x} l_j}{G t_j} \right) dz = \int_0^l \{q\}_{T_x}^T \text{diag} \left(\frac{l}{G t} \right) \{q'\}_{T_x} dz$$

dall'uguaglianza delle due espressioni si ricava l'incognita A_x^* .

Allo stesso modo applicando solo T_y o M_z , si ottengono A_y^* e J_t .

Se invece riferiamo le azioni T_x , T_y e M_z ad un punto qualsiasi e non al centro di taglio, otteniamo i flussi $\{q\}$ e il lavoro δL_d . questo lavoro sarà uguale al precedente perché le azioni interne sono equivalenti alle precedenti, ma non posso scindere i tre contributi di T_x , T_y e M_z quindi non possiamo più ricavare A_x^* , A_y^* e J_t .

¹ Questo tipo di approssimazione è del tutto scorretto nella progettazione delle pale degli elicotteri, ambito in cui T_z è tutt'altro che trascurabile.

Problemi di Estremità

Introduzione

La soluzione della trave di De Saint Venant è una soluzione centrale, vale lontano dalle zone d'estremità. La distanza dalle zone d'estremità è data dalla massima dimensione della sezione.

I problemi d'estremità nascono perché due sistemi equivalenti, ma applicati in modo diverso, danno localmente effetti diversi, e quindi sforzi diversi.

La soluzione centrale è equilibrata e congruente, per capire cosa non funziona all'estremità, consideriamo la deformata di una trave sottoposta solo ad un momento torcente M_z .

I correnti possono traslare lungo z mentre sul piano della sezione i diaframmi impongono spostamenti rigidi. Il parametro d'ingobbamento mostra la deformazione della sezione ma non fa capire facilmente cosa succede alla sezione.

Usiamo il PLVC per determinare gli spostamenti s_1 e s_2 .

Nel sistema fittizio mettiamo un flusso unitario sul pannello:

spostamenti esterni:

$$s_1, s_2, \theta, \theta + d\theta$$

spostamenti interni:

$$\gamma$$

$$q' = 1 \Rightarrow M' = 2 \cdot 1 \cdot \Omega$$

$$\delta L_e = -2 \cdot 1 \cdot \Omega \theta + 2 \cdot 1 \cdot \Omega (\theta + d\theta) + s_2 \cdot 1 \cdot dz - s_1 \cdot 1 \cdot dz$$

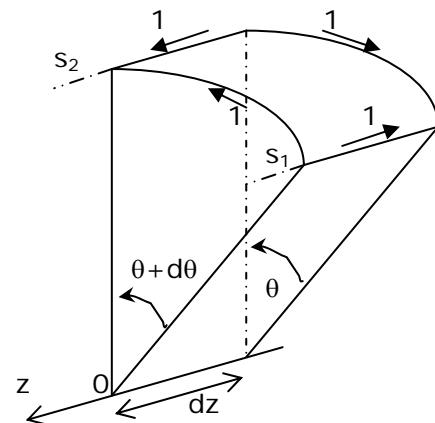
$$\delta L_e = 2\Omega d\theta + (s_2 - s_1)dz$$

$$\delta L_d = \frac{q \cdot 1 \cdot l}{Gt} dz$$

$$\delta L_e = \delta L_d \Rightarrow (s_2 - s_1)dz + 2\Omega d\theta = \frac{ql}{Gt} dz \Rightarrow s_2 - s_1 = \frac{ql}{Gt} - 2\Omega \dot{\theta}$$

La relazione ottenuta ci dà gli spostamenti relativi tra due estremi del pannello e non quelli assoluti, possiamo usarla per costruire un metodo degli spostamenti per il calcolo dei flussi.

Per una sezione quadrata di lato a e spessore t , si ha:



$$q = \frac{M_z}{2\Omega} = \frac{M_z}{2a^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{2G\Omega t} \sum_{j=1}^m q_j l_j = \frac{1}{2Ga^2 t} \frac{M_z}{2a^2} 4a = \frac{M_z}{Ga^3 t}$$

$$s_2 - s_1 = \frac{ql}{Gt} - 2\Omega \dot{\theta} = \frac{M_z a}{2a^2 Gt} - 2 \frac{a^2}{4} \frac{M_z}{Ga^3 t} = 0$$

la sezione quadrata non s'ingobba. Come polo per determinare la Ω si è scelto il centro della sezione.

Per una sezione rettangolare di lati a e $b=2a$, e di spessore t , si ha:

$$q = \frac{M_z}{2\Omega} = \frac{M_z}{2ab} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{2G\Omega t} \sum_{j=1}^m q_j l_j = \frac{1}{2Gabt} \frac{M_z}{2ab} (2a + 2b) = \frac{3M_z}{8Ga^3 t}$$

$$s_2 - s_1 = \frac{ql}{Gt} - 2\Omega \dot{\theta} = \frac{M_z a}{2abGt} - 2 \frac{ab}{4} \frac{3M_z}{8Ga^3 t} = -\frac{M_z}{8Gta}$$

$$s_3 - s_2 = \frac{M_z}{8Gta} \quad s_4 - s_3 = -\frac{M_z}{8Gta} \quad s_1 - s_4 = \frac{M_z}{8Gta}$$

Il Δs è distribuito a metà sui due correnti. Vista dall'asse z , la sezione non cambia forma anche se ruota, i punti invece traslano lungo z .

Dopo la deformazione, la sezione non è più piana e se abbiamo un incastro in corrispondenza di questa sezione, la sua deformata non è congruente con il vincolo. Questo è un problema di estremità.

Se abbiamo una forza concentrata su una sezione della trave le due facce della sezione vorrebbero avere comportamenti diversi, ed invece devono coincidere per congruenza.

Altri problemi d'estremità sono rappresentati da:

- Cambiamento della sezione della trave;
- Corrente rotto in un punto della trave oppure non vincolato all'incastro in corrispondenza della sezione incastrata².

² L'azione assiale N si trasferirà agli altri correnti.

Soluzioni d'Estremità (equilibrio)

Consideriamo la soluzione fondamentale valida su tutta la trave, ma alle estremità aggiungiamo una soluzione correttiva:

$$\{N\}_T = \{N\}_F + \{N\}_C \quad \{q\}_T = \{q\}_F + \{q\}_C$$

La parte fondamentale sappiamo già calcolarla, dobbiamo ancora determinare la parte correttiva, che ci serve per garantire la congruenza.

La soluzione fondamentale è equilibrata rispetto ai carichi esterni e congruente nella zona centrale (perché abbiamo usato σ che verifica la congruenza, e τ che verifica anche la congruenza con le $\dot{\theta}_i = \dot{\theta}_k$). Allora la parte correttiva deve essere congruente e autoequilibrata.

Partiamo dal calcolo delle $\{N\}_C$ che devono essere autoequilibrate.

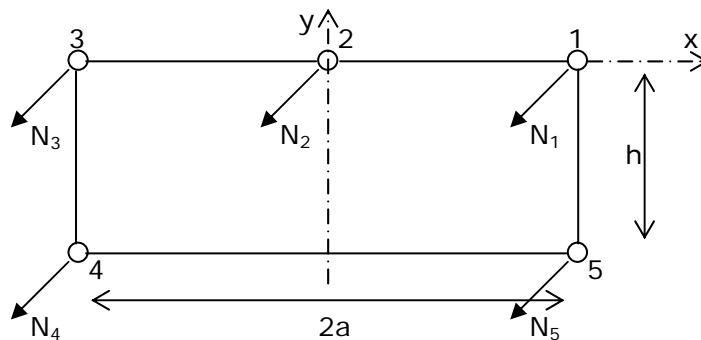
Se abbiamo n correnti possiamo scrivere 3 equazioni di equilibrio e ci restano $n-3$ incognite:

$$\{N\}_{C,n \times 1} = [L]_{n \times (n-3)} \{\Psi\}_{(n-3) \times 1}$$

Le n variabili li possiamo esprimere in funzione di $n-3$ incognite ψ .

Calcolo delle matrici [L] ed [H]

Supponiamo di avere una sezione così fatta:



Dalla traslazione lungo z , dalla rotazione attorno ad z e dalla rotazione attorno ad y , si ha:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 0 \\ N_4 h + N_5 h = 0 \\ (N_1 + N_5)a - (N_3 + N_4)a = 0 \end{cases}$$

Con questo sistema d'equazioni, possiamo determinare tre incognite in funzione delle restanti due.

Scegliamo:

$$\begin{cases} N_1 = \Psi_1 \\ N_4 = \Psi_2 \end{cases}$$

e andiamo ad esprimere tutte le azioni assiali in funzione di ψ_1 e ψ_2 :

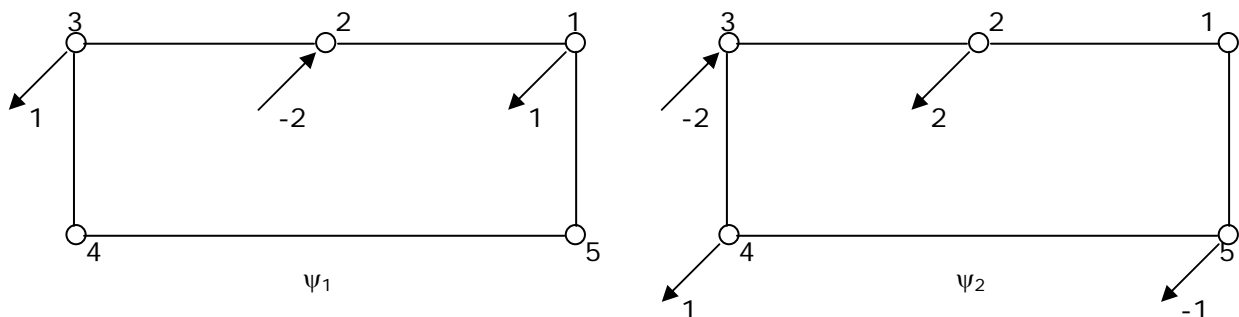
$$\begin{cases} N_5 = -N_4 = -\Psi_2 \\ \Psi_1 - \Psi_2 - N_3 - \Psi_2 = 0 \\ \Psi_1 + N_2 + \Psi_1 - 2\Psi_2 + \Psi_2 - \Psi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_5 = -\Psi_2 \\ N_3 = \Psi_1 - 2\Psi_2 \\ N_2 = -2\Psi_1 + 2\Psi_2 \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Le colonne della matrice $[L]$ costituiscono dei sistemi autoequilibrati di azioni assiali. Questi sistemi dipendono dalla scelta fatta per ψ_1 e ψ_2 .

Per la sezione a n correnti, le variabili ψ_i sono $n-3$ ed i sistemi autoequilibrati (cioè le colonne di $[L]$) sono $n-3$.

Si può vedere facilmente che i due sistemi trovati sono autoequilibrati:



Lavorando in questo modo, dobbiamo soltanto determinare le ψ_i , cioè le ampiezze delle nostre soluzioni autoequilibrate.

I flussi correttivi derivano ovviamente dalle azioni assiali correttive, quindi per determinare la matrice $[H]$, usiamo la matrice $[L]$ appena trovata.

Per determinare la 1ª colonna di $[H]$ prendiamo la 1ª colonna di $[L]$, cioè il 1° sistema di azioni assiali autoequilibrato e determiniamo i flussi corrispondenti.

Date le azioni assiali sulla sezione, i flussi si calcolano usando le $n-1$ equazioni dei flussi sorgenti ed un'equazione dei momenti.

Per i flussi sorgenti dobbiamo usare la $\varphi = -\frac{dN}{dz}$, che vale ovunque, perché si ottiene dalla relazione di Cauchy cioè dall'equilibrio di un cubetto infinitesimo,

e non possiamo usare la $\varphi = -T_j \frac{S_{xi}}{J_x}$, perché questa si ottiene dalla relazione

$\sigma = \frac{T_z}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x$ che vale solo nelle ipotesi di De Saint Venant, cioè lontano dalle estremità.

1ª colonna di [H]: scegliamo di tagliare il pannello 5, quindi si avrà che $q'_5=0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} q'_1 = -\frac{dN_1}{dz} = -\frac{d\Psi_1}{dz} = -\Psi'_1 \\ q'_2 = -\frac{d}{dz}(N_1 + N_2) = -\frac{d}{dz}(\Psi_1 - 2\Psi_1) = \Psi'_1 \\ q'_3 = -\frac{d}{dz}(N_1 + N_2 + N_3) = -\frac{d}{dz}(\Psi_1 - 2\Psi_1 + \Psi_1) = 0 \\ q'_4 = -\frac{d}{dz}(N_1 + N_2 + N_3) = 0 \end{array} \right.$$

Scegliendo come polo il corrente 2, dall'equivalenza dei momenti si ha:

$$\Omega_{01} = 0 \quad \Omega_{02} = 0 \quad \Omega = 2ah$$

$$2q^* \Omega + \sum_{j=1}^m 2q'_j \Omega_{0j} = 0 \quad \Rightarrow \quad q^* = 0$$

Infine i flussi sono:

$$q_1 = -\Psi'_1 \quad q_2 = \Psi'_1 \quad q_3 = 0 \quad q_4 = 0 \quad q_5 = 0$$

questi ottenuti sono i flussi correttivi associati alla prima colonna di [L].

2ª colonna di [H]: scegliamo di tagliare il pannello 5, quindi si avrà che $q'_5=0$,

$$\left\{ \begin{array}{l} q'_1 = 0 \\ q'_2 = -\frac{d}{dz}(N_2) = -\frac{d}{dz}(2\Psi_2) = -2\Psi'_2 \\ q'_3 = -\frac{d}{dz}(N_2 + N_3) = -\frac{d}{dz}(2\Psi_2 - 2\Psi_2) = 0 \\ q'_4 = -\frac{d}{dz}(N_2 + N_3 + N_4) = -\frac{d}{dz}(2\Psi_2 - 2\Psi_2 + \Psi_2) = -\Psi'_2 \end{array} \right.$$

Scegliendo come polo il corrente 3, dall'equivalenza dei momenti si ha:

$$\Omega_{01} = \Omega_{02} = \Omega_{03} = 0 \quad \Omega_{04} = ah \quad \Omega = 2ah$$

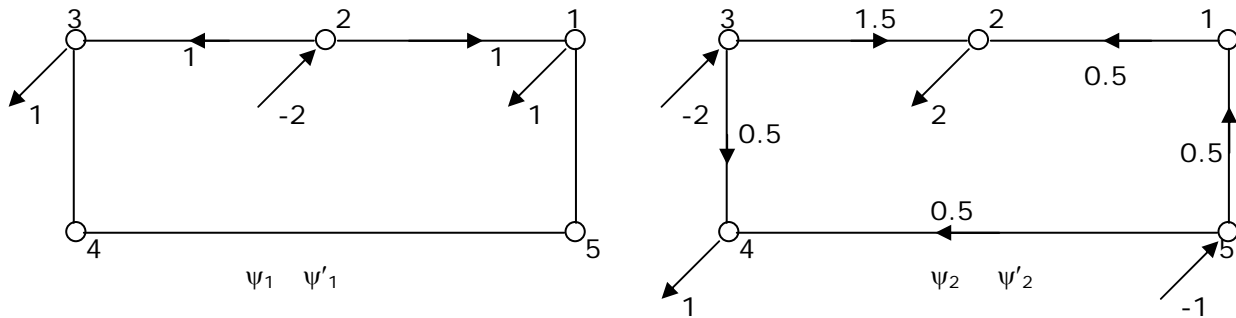
$$2q^* \Omega + \sum_{j=1}^m 2q'_j \Omega_{0j} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2q^* 2ah - 2\Psi'_2 ah = 0 \quad \Rightarrow \quad q^* = 0.5\Psi'_2$$

Infine i flussi sono:

$$q_1 = 0.5\Psi'_2 \quad q_2 = -1.5\Psi'_2 \quad q_3 = 0.5\Psi'_2 \quad q_4 = -0.5\Psi'_2 \quad q_5 = 0.5\Psi'_2$$

questi ottenuti sono i flussi correttivi associati alla seconda colonna di [L].

Andiamo a verificare con l'analogia idraulica se l'equilibrio alle traslazioni è verificato:



Alla fine si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 1 & -1.5 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi'_1 \\ \Psi'_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow [H] = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 1 & -1.5 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Per il calcolo dei flussi associati a sistemi di azioni assiali autoequilibrati, può essere molto utile il metodo matriciale³.

Sistemi d'estremità (congruenza)

Abbiamo verificato l'equilibrio della nostra soluzione correttiva, adesso dobbiamo passare a verificarne la congruenza.

La soluzione fondamentale è congruente lungo z (ma non alle estremità) perché è stata ricavata dalle relazioni di congruenza, quindi rimane da imporre la congruenza della sola parte correttiva.

Usando il teorema di Menabrea, partiamo dalle configurazioni d'equilibrio e minimizziamo l'energia di deformazione:

$$V_d = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV$$

per gli m flussi dei pannelli si ha,

³ Vedi pag. 85

$$V_{d,p} = \frac{1}{2} \int \sum_{j=1}^m \frac{q_j^2 l_j}{Gt_j} dz = \frac{1}{2} \int \{q\}^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right) \{q\} dz$$

per gli n correnti,

$$V_{d,c} = \frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2}{EA_i} dz = \frac{1}{2} \int \{N\}^T \text{diag}\left(\frac{1}{EA}\right) \{N\} dz$$

quindi l'energia di deformazione sarà:

$$V_{d,c} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\{N\}_c^T \text{diag}\left(\frac{1}{EA}\right) \{N\}_c + \{q\}_c^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right) \{q\}_c \right) dz$$

$$V_{d,c} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\{\Psi\}^T [L] \text{diag}\left(\frac{1}{EA}\right) [L] \{\Psi\} + \{\Psi'\}^T [H] \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right) [H] \{\Psi'\} \right) dz$$

dove,

$$[K] = [L]^T \text{diag}\left(\frac{1}{EA}\right) [L] \quad [M] = [H]^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right) [H]$$

Le matrici [K] ed [M] sono simmetriche e definite positive.

Chiaramente diverse scelte dei sistemi autoequilibrati, mi daranno matrici diverse.

Abbiamo espresso l'energia di deformazione in funzione di ψ e ψ' , la condizione di minimo dell'energia, ci dà:

$$\frac{\partial F}{\partial \Psi} - \left(\frac{\partial F}{\partial \Psi'} \right)' = 0 \quad \Rightarrow \quad [K] \{\Psi\} - [M] \{\Psi''\} = 0$$

Rappresenta la
congruenza

Una possibile soluzione del sistema trovato, ha la forma: $\{\Psi\} = \{X\} e^{z/\lambda}$.
Attenzione che non siamo nel dominio del tempo, quindi λ ha le stesse dimensioni di una lunghezza.

$$[K] \{X\} e^{z/\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} [M] \{X\} e^{z/\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left([K] - \frac{1}{\lambda^2} [M] \right) \{X\} e^{z/\lambda} = 0$$

$$\left([K] - \frac{1}{\lambda^2} [M] \right) \{X\} = 0$$

Questo sistema è omogeneo, ed ammette soluzione diversa da quella banale, $\{X\} = \{0\}$, solo se il suo determinante è nullo, cioè,

$$\left([K] - \frac{1}{\lambda^2} [M] \right) = 0$$

Imporre che il determinante sopracitato sia nullo, significa imporre che le due equazioni del sistema siano linearmente dipendenti, cioè dicano tutte e due la stessa cosa, in questo modo eliminiamo una delle due equazioni.

Il tutto si riduce ad un problema agli autovalori, di grado $2(n-3)$. Bisogna trovare gli $n-3$ autovalori λ_i e i suoi rispettivi autovettori $\{X\}_i$.

La soluzione finale del problema correttivo sarà:

$$\{\Psi\} = \sum_{i=1}^{n-3} \left(A_i \{X\}_i e^{z/\lambda_i} + B_i \{X\}_i e^{-z/\lambda_i} \right) = \{X\} \left(\{Ae^{z/\lambda}\} + \{Be^{-z/\lambda}\} \right)$$

A e B sono le ampiezze delle $n-3$ autosoluzioni, e le determiniamo imponendo le condizioni al contorno, cioè $n-3$ relazioni per ogni estremo della trave, quindi $2(n-3)$ condizioni.

$$\{N\}_C = [L]\{X\} \left(\{Ae^{z/\lambda}\} + \{Be^{-z/\lambda}\} \right)$$

$$\{q\}_C = [H]\{X\} \left(\{Ae^{z/\lambda}\} + \{Be^{-z/\lambda}\} \right)$$

λ ha il significato di una lunghezza di diffusione: ad una distanza dall'estremo pari a circa 3λ la soluzione smorzata sparisce (trave allungata).

Sull'estremo libero s'impone la condizione di equilibrio e non la congruenza, al contrario di quello che succede all'incastro, dove si deve anche studiare l'ingobbamento della sezione.

La condizione all'estremo libero, che essendo scarico $\{N\}_C = 0$, equivale a dire che $\{A\} = 0$, cioè la parte non smorzata deve essere nulla, mentre non abbiamo condizioni su B dato che la parte non smorzata è già trascurabile in $z = l > 3\lambda$.

Se l'estremo non è libero o la trave non è allungata, abbiamo entrambi i contributi.

Se la sezione ha delle simmetrie, gli autovalori sono simmetrici o antisimmetrici rispetto ai piani di tali simmetrie. Se, effettuando considerazioni di simmetria e di antisimmetria, si sceglie una base (ovvero si scelgono le colonne di $[L]$) costituita dagli autovettori, le matrici $[K]$ ed $[M]$ che ne risultano sono già diagonali e il problema è facilmente risolvibile (non bisogna risolvere un polinomio caratteristico di grado elevato, ma i λ_i si ricavano da equazioni lineari disaccoppiate).

Esempio 1

Riprendiamo la sezione a 5 correnti esaminata in precedenza, ed andiamo a calcolare gli autovettori e gli autovalori della sezione.

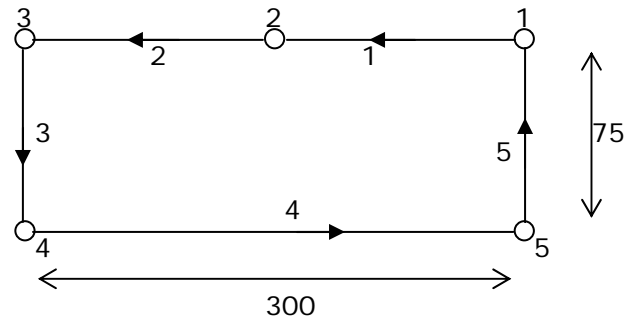
Dati:

$$t = 1.2 \text{ mm}$$

$$A = 200 \text{ mm}^2$$

$$E = 7200 \text{ kg/mm}^2$$

$$G = 2800 \text{ kg/mm}^2$$



Abbiamo già calcolato le matrici $[L]$ ed $[H]$:

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [H] = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 1 & -1.5 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Prima di andare a calcolare le matrici $[K]$ ed $[M]$, facciamo attenzione alle grandezze dei valori di tali matrici, infatti, ci si può accorgere facilmente che:

$$K_{ij} \approx \frac{1}{7200 \cdot 200} = 7 \cdot 10^{-7} \quad M_{ij} \approx \frac{150}{2800 \cdot 1.2} = 4 \cdot 10^{-2}$$

Questa notevole diversità negli ordini di grandezza è un fatto negativo. Un errore nelle λ ci crea problemi nel calcolo degli autovettori perché potremmo non accorgerci di quali sono le due espressioni linearmente dipendenti.

Per rimediare al problema scriviamo:

$$\begin{cases} [K] = \frac{1}{E\bar{A}} [\bar{K}] & \text{dove} \quad [\bar{K}] = [L]^T \text{diag} \left(\frac{\bar{A}}{A} \right) [L] \\ [M] = \frac{\bar{I}}{Gt} [\bar{M}] & \text{dove} \quad [\bar{M}] = [H]^T \text{diag} \left(\frac{\bar{I}}{I} \right) [H] \end{cases}$$

\bar{A} ed \bar{I} sono valori presi dalla sezione per avere gli stessi ordini di grandezza. In questo modo $[\bar{K}]$ ed $[\bar{M}]$ sono dello stesso ordine di grandezza e il problema diventa:

$$\det \left(\frac{1}{E\bar{A}} [\bar{K}] - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\bar{I}}{Gt} [\bar{M}] \right) = 0$$

ponendo ancora che $\beta^2 = \frac{Gt}{\bar{l}EA} \lambda^2$ si ottiene:

$$\det\left(\left[\bar{K}\right] - \frac{1}{\beta^2}\left[\bar{M}\right]\right) = 0$$

Quindi passiamo a determinare β e non più λ . Nel nostro esempio, i correnti hanno tutti la stessa area, quindi $\bar{A} = A$, mentre scegliamo $\bar{l} = 150$,

$$\left[\bar{K}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{diag}(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\left[\bar{M}\right] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -1.5 & 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \text{diag}(1 \ 1 \ 0.5 \ 2 \ 0.5) \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 1 & -1.5 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3.25 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\left[\bar{K}\right] - \frac{1}{\beta^2}\left[\bar{M}\right]\right) = 0 \Rightarrow \det(\beta^2\left[\bar{K}\right] - \left[\bar{M}\right]) = 0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix} 6\beta^2 - 2 & -6\beta^2 + 2 \\ -6\beta^2 + 2 & 10\beta^2 - 3.25 \end{bmatrix} = 0$$

$$24\beta^4 - 15.5\beta^2 + 2.5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta_1^2 = 0.\bar{3} \\ \beta_2^2 = 0.3125 \end{cases}$$

alla fine si ottengono gli autovalori,

$$\lambda_1 = 146.38 \quad \lambda_2 = 141.73$$

Possiamo dire che alla distanza di $3\lambda \approx 500$ mm dall'incastro, la soluzione correttiva è trascurabile.

Determiniamo adesso le autosoluzioni:

$$(\beta^2\left[\bar{K}\right] - \left[\bar{M}\right])\{X\} = 0$$

sostituendo il valore di β_1 , si ha,

$$\begin{bmatrix} 1.9998 - 2 & -1.9998 + 2 \\ -1.9998 + 2 & 3.\bar{3} - 3.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

si vede facilmente che la prima equazione è una identità, $0=0$, quindi siamo costretti ad aggiungere una condizione arbitraria, la condizione di normalizzazione, che esprime il fatto che l'autovettore ha modulo unitario:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad \text{oppure in forma matriciale} \quad \{X\}^T \{X\} = 1^4$$

Con la condizione di normalizzazione il sistema diventa,

$$\begin{cases} 0.083x_2 = 1 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

infine, l'autovettore associato a λ_1 è $\{X\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$. L'autovettore trovato ci indica il fatto che la 1^a colonna di $[L]$ è autosoluzione.

Se ci sono assi di simmetria, le autosoluzioni sono sempre simmetriche o antisimmetriche, quindi possiamo notare subito che la 2^a colonna di $[L]$ non è autosoluzione.

Andiamo a sostituire il valore di β_2 :

$$\begin{bmatrix} 1.875 - 2 & -1.875 + 2 \\ -1.875 + 2 & 3.125 - 3.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

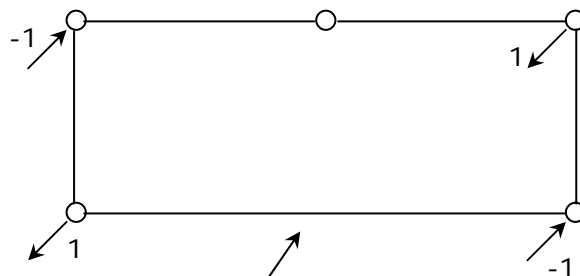
questa volta le due equazioni sono uguali, quindi ne eliminiamo una,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.707 \\ x_2 = 0.707 \end{cases} \Rightarrow \{X\}_2 = \begin{Bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{Bmatrix}$$

Se avessimo scelto la condizione di normalizzazione di 1° grado $x_1=1$, avremmo trovato un autovettore $\{X\}_2 = \{1, 1\}^T$, quindi uguale a quello precedentemente trovato a meno di una costante moltiplicativa.

La seconda autosoluzioni sarà:

$$[L]\{X\}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$



La seconda autosoluzione è ovviamente antisimmetrica

⁴ Altre scelte possibili sono: $x_1+x_2=1$, $x_1=1$, queste sono condizioni di 1° grado. L'equazione $x_1^2+x_2^2=1$, non può mai essere contraddetta dalle equazioni del sistema, perché è di 2° grado. Le condizioni di 1° grado invece, potrebbero risultare in contrasto con le equazioni del sistema a causa di errori di approssimazione.

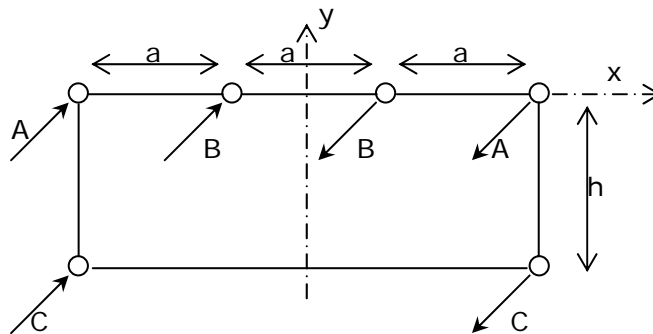
le ampiezze da determinare con le condizioni al contorno sono proprio le ampiezze delle autosoluzioni.

Le autosoluzioni non dipendono dalla scelta iniziale dei sistemi autoequilibrati, possono cambiare i moduli ma la forma è la stessa. Il calcolo fatto fino ad ora, dipende solo dalla forma della sezione e non dalla congruenza, le ampiezze, invece, dipendono dalle condizioni di congruenza.

Esempio 2

Prendiamo una sezione a 6 correnti fatta come in figura. Abbiamo quindi tre ψ_i e di conseguenza tre possibili sistemi autoequilibrati. Vediamo di poterli trovare facendo uso della simmetria della sezione.

Cominciamo dal sistema antisimmetrico:



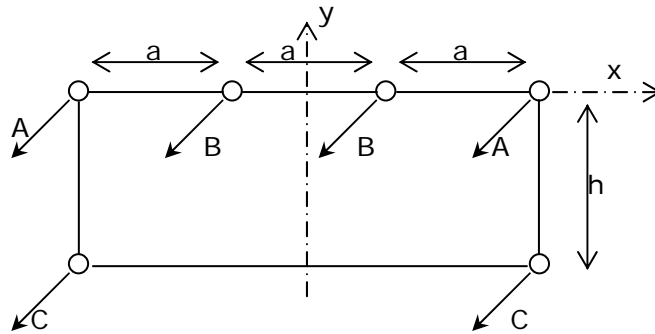
$$\begin{cases} R_z = 0 & \Rightarrow & 0 = 0 \\ M_x = 0 & \Rightarrow & 0 = 0 \\ M_y = 0 & \Rightarrow & B \cdot a + A \cdot 3a + C \cdot 3a = 0 \end{cases}$$

scegliendo $A = \Psi_1$ e $B = 3\Psi_2$ si ha $C = -\Psi_1 - \Psi_2$, otteniamo dunque due sistemi antisimmetrici:

$$\{N\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & -3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{Bmatrix}$$

I due sistemi antisimmetrici trovati, non è detto che siano le autosoluzioni, perché la scelta che abbiamo fatto per determinarli è del tutto arbitraria. È sicuro comunque che due è il numero massimo di sistemi antisimmetrici che possiamo ottenere.

Passiamo adesso al sistema simmetrico:



$$\begin{cases} R_z = 0 & \Rightarrow & A + B + C = 0 \\ M_x = 0 & \Rightarrow & C = 0 \\ M_y = 0 & \Rightarrow & 0 = 0 \end{cases}$$

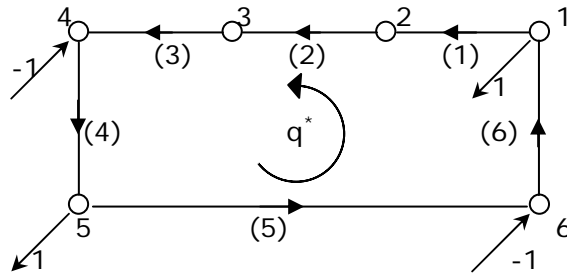
scegliendo $B = \Psi_3$ si ha $A = -\Psi_3$, otteniamo un solo sistema simmetrico:

$$\{N\} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \{\Psi_3\}$$

Questo sistema è un'autosoluzione, perché qui la scelta era unica. Infine, la matrice $[L]$ è così fatta:

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Adesso ci resta che da costruire la matrice $[H]$.
Partiamo dal primo sistema autoequilibrato $\underline{\psi}_1$:



tagliamo il pannello 6, quindi si avrà che $q'_6=0$. Gli altri flussi di taglio saranno:

$$q'_1 = -1 \quad q'_2 = -1 \quad q'_3 = -1 \quad q'_4 = 0 \quad q'_5 = -1$$

Per l'equivalenza ai momenti scegliamo come polo il corrente 4:

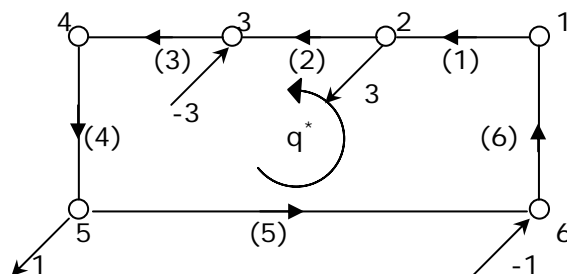
$$\Omega_{01} = \Omega_{02} = \Omega_{03} = \Omega_{04} = 0 \quad \Omega_{05} = \frac{3ah}{2} \quad \Omega = 3ah$$

$$2q^* 3ah - 2 \cdot 1 \frac{3ah}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad q^* = \frac{1}{2}$$

i flussi di taglio totali saranno:

$$q_1 = -0.5 \quad q_2 = -0.5 \quad q_3 = -0.5 \quad q_4 = 0.5 \quad q_5 = -0.5 \quad q_6 = 0.5$$

Passiamo al secondo sistema autoequilibrato $\underline{\psi}_2$:



tagliamo il pannello 6, si avrà che $q'_6=0$. Gli altri flussi di taglio saranno:

$$q'_1 = 0 \quad q'_2 = -3 \quad q'_3 = 0 \quad q'_4 = 0 \quad q'_5 = -1$$

$$[H] = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 1 \\ -0.5 & -2.5 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & -1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Per calcolarci le matrici $[K]$ ed $[M]$ abbiamo bisogno dei dati della sezione, che sono:

$$A = 300 \text{ mm}^2 \quad t = 1 \text{ mm} \quad h = 80 \text{ mm} \quad a = 100 \text{ mm}$$

Si ottiene:

$$[\bar{K}] = [L]^T \text{diag}\left(\frac{\bar{A}}{A}\right)[L] = [L]^T \text{diag}(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)[L] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 4^i \end{bmatrix}$$

$$[\bar{M}] = [H]^T \text{diag}\left(\frac{l}{l}\right)[H] = [H]^T \text{diag}(1 \quad 1 \quad 1 \quad 0.8 \quad 3 \quad 0.8)[H] = \begin{bmatrix} 1.9 & 1.9 & 0 \\ 1.9 & 7.9 & 0 \\ 0 & 0 & 2^i \end{bmatrix}$$

Il sistema $(\beta^2[\bar{K}] - [\bar{M}])\{X\} = 0$ ammette soluzione non banale se e solo se il determinante della matrice $(\beta^2[\bar{K}] - [\bar{M}])$ è nullo, cioè

$$\det \begin{bmatrix} 4\beta^2 - 1.9 & 2\beta^2 - 1.9 & 0 \\ 2\beta^2 - 1.9 & 20\beta^2 - 7.9 & 0 \\ 0 & 0 & 4\beta^2 - 2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (4\beta^2 - 2)(76\beta^4 - 62\beta^2 + 11.4) = 0$$

$$\beta_1^2 = 0.5 \quad \beta_2^2 = 0.535872 \quad \beta_3^2 = 0.279918$$

a cui corrispondono le seguenti λ ,

$$\lambda_1 = 196.4 \quad \lambda_2 = 203.3 \quad \lambda_3 = 146.94$$

ⁱ Il sistema associato a questo termine è autosoluzione, perché questa parte della matrice è diagonale. Infatti, se abbiamo una sezione simmetrica con un certo carico simmetrico possiamo trascurare le parti antisimmetriche, perché il carico simmetrico non lavora per le colonne antisimmetriche, e viceversa. Quello che succede in questo caso, dove il carico simmetrico è disaccoppiato con il carico antisimmetrico.

Sostituendo β_1^2 , si ha:

$$\begin{bmatrix} 4 \cdot 0.5 - 1.9 & 2 \cdot 0.5 - 1.9 & 0 \\ 2 \cdot 0.5 - 1.9 & 20 \cdot 0.5 - 7.9 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \cdot 0.5 - 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0.1x_1 - 0.9x_2 = 0 \\ -0.9x_1 + 2.1x_2 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

A questo sistema si aggiunge la condizione di normalizzazione $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, e si ottiene,

$$\{X\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

si nota che la terza colonna della matrice [L] era autosoluzione, come già ampiamente previsto.

Sostituendo β_2^2 , si ha:

$$\begin{cases} 0.243488x_1 - 0.828256x_2 = 0 \\ -0.828256x_1 + 2.81744x_2 = 0 \\ 0.143488x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3.4016x_2 = 0 \\ x_1 - 3.4016x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Poiché le prime due equazioni sono uguali, aggiungiamo anche qui la condizione di normalizzazione $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, e si ottiene,

$$\{X\}_2 = \begin{Bmatrix} 0.9594 \\ 0.2820 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sostituendo β_2^2 , si ha:

$$\begin{cases} -0.780328x_1 - 1.3401x_2 = 0 \\ -1.3401x_1 - 2.30164x_2 = 0 \\ -0.880x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 1.71735x_2 = 0 \\ x_1 + 1.7175x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Poiché le prime due equazioni sono "quasi" uguali, aggiungiamo la condizione di normalizzazione $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, e si ottiene,

$$\{X\}_3 = \begin{Bmatrix} -0.8642 \\ 0.5032 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La matrice degli autovettori completa sarà:

$$[X] = [X_1 \ X_2 \ X_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0.9594 & -0.8642 \\ 0 & 0.2820 & 0.5032 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed infine le autosoluzioni saranno,

$$[N] = [L][X] = \begin{bmatrix} -1 & 0.9594 & -0.8642 \\ 1 & 0.8646 & 1.5096 \\ 1 & -0.8646 & -1.5096 \\ -1 & -0.9594 & 0.8642 \\ 0 & 1.2414 & -0.361 \\ 0 & -1.2414 & 0.361 \end{bmatrix}$$

Condizioni di congruenza

La trave deve essere in equilibrio e la forma deve essere congruente con i vincoli. La relazione $s_2 - s_1 = \frac{ql}{Gt} - 2\Omega_0 \dot{\theta}$, permette di calcolare gli spostamenti relativi (e non assoluti) di due estremi del pannello, la Ω_0 cambia al variare del polo, gli spostamenti non sono direttamente utilizzabili perché sono affetti, non solo dalla deformazione, ma anche dallo spostamento rigido (legato a θ').

Lo spostamento rigido non altera la congruenza, quindi possiamo trascurarlo e considerare solo lo spostamento deformativo.

Il parametro di ingobbamento elimina dalla relazione ($s_2 - s_1$) la parte rigida dello spostamento.

Abbiamo visto che la matrice dei valori d'ingobbamento era:

$$\{\Delta\} = [L]^T \{s_z\} = [H]^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right) \{q\}$$

Questa matrice ha per elementi, dei valori che ci indicano la distanza degli n-3 correnti dal piano, costruito dai 3 correnti che abbiamo eliminato nella determinazione della matrice [L].

Esiste una seconda forma per la matrice [Δ] che è più semplice da usare, perché non dobbiamo eliminare gli spostamenti s_z .

Sapendo che,

$$\{q\}_T = \{q\}_F + \{q\}_C \Rightarrow \{\Delta\}_T = \{\Delta\}_F + \{\Delta\}_C$$

la $\{\Delta\}_F$ è calcolabile con la solita formula. Ci resta da determinare la parte correttiva:

$$\{\Delta\}_C = [H]^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right) \{q\}_C = [H]^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right) [H] \{\Psi'\} = [M] \{\Psi'\}$$

ma

$$\{\Psi\} = [X] \left(\{Ae^{z/\lambda}\} + \{Be^{-z/\lambda}\} \right) \Rightarrow \{\Psi'\} = [X] \text{diag}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \left(-\{Ae^{z/\lambda}\} + \{Be^{-z/\lambda}\} \right)$$

$$\{\Delta\}_C = [M] [X] \text{diag}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \left(-\{Ae^{z/\lambda}\} + \{Be^{-z/\lambda}\} \right)$$

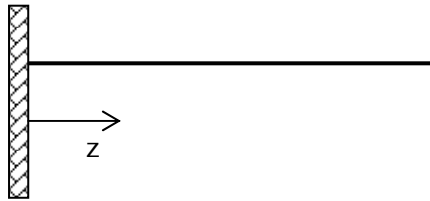
Il termine $Ae^{z/\lambda}$ è trascurabile se la trave è allungata, perché l'estremo libero impone che $A=0$. Quindi si ha:

$$\{\Delta\}_C = [M] [X] \text{diag}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \{Be^{-z/\lambda}\} = [\Delta]_C \{Be^{-z/\lambda}\}$$

$$\{\Delta\}_T = \{\Delta\}_F + [\Delta]_C \{Be^{-z/\lambda}\}$$

Incastro Piano

Per una sezione piana incastrata, la condizione di congruenza si traduce in:

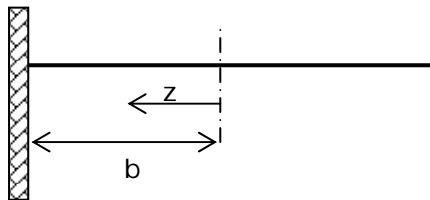


$$\{\Delta\}_T = 0$$

e ponendo l'origine del sistema di riferimento nell'incastro, si ha,

$$Be^{-0/\lambda} = B \Rightarrow \{\Delta\}_T = \{\Delta\}_F + [\Delta]_C \{B\} = 0 \Rightarrow \{B\} = -[\Delta]_C^{-1} \{\Delta\}_F$$

Abbiamo ottenuto un sistema di n-3 equazioni nelle n-3 incognite B, che sono le ampiezze delle autosoluzioni.



Se la trave non è allungata e l'asse z non parte dall'incastro $\{\Delta\}_C$ contiene tutti i termini,

$$[\Delta]_C (-\{Ae^{b/\lambda}\} + \{Be^{-b/\lambda}\}) = -\{\Delta\}_F$$

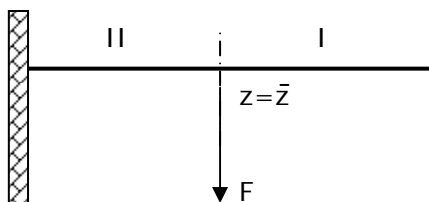
questo sarà un sistema di n-3 equazioni in

2(n-3) incognite, quindi dobbiamo aggiungere

le condizioni al contorno sull'altro estremo della trave per avere le sufficienti equazioni e risolvere il sistema.

Carico Concentrato

Prendiamo in esame una forza F che agisce sulla nostra trave, questo carico concentrato introduce nella trave una discontinuità.



Guardando vicino al punto d'applicazione del carico F, ipotizziamo che la trave sia allungata quindi che $A=0$, dobbiamo imporre delle condizioni al contorno:

1. Le due facce della sezione devono avere stessa forma.
2. Le azioni assiali devono essere continue.

1.

$$\{\Delta\}_T^I = \{\Delta\}_T^{II} \Rightarrow \begin{cases} \{\Delta\}_T^I = [\Delta]_C^I \{B_I e^{-\bar{z}_I/\lambda}\} + \{\Delta\}_F^I \\ \{\Delta\}_T^{II} = [\Delta]_C^{II} \{B_{II} e^{-\bar{z}_{II}/\lambda}\} + \{\Delta\}_F^{II} \end{cases}$$

$$[\Delta]_C^I \{B_I e^{-\bar{z}_I/\lambda}\} = [\Delta]_C^{II} \{B_{II} e^{-\bar{z}_{II}/\lambda}\} + \{\Delta\}_F^{II} \quad (*)$$

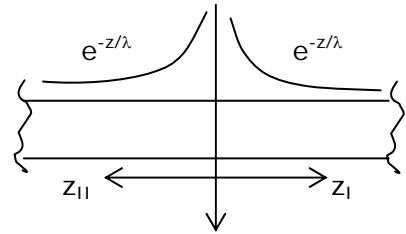
Questo termine è nullo poiché la trave è scarica all'estremo libero.

$[\Delta]_C^I = [\Delta]_C^{II} = [\Delta]_C$ perché sono matrici caratteristiche della sezione, e non variano.

Vediamo adesso, come possa variare la relazione trovata al variare del sistema di riferimento scelto.

a)

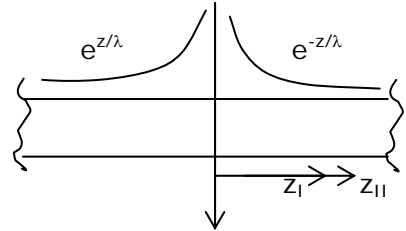
Supponiamo di porre l'origine dell'asse z sulla verticale del carico concentrato. In $z=0$ si ha $e^{-z_I/\lambda} = 1$ e $e^{-z_{II}/\lambda} = 1$, gli spostamenti hanno verso opposto, scegliamo come positivi quelli concordi con z_I , quindi cambiamo segno ai termini del 2° membro della (*) e si ha:



$$[\Delta]_C (\{B_I\} + \{B_{II}\}) = -\{\Delta\}_F^{II}$$

b)

Adesso scegliamo i due sistemi di riferimento concordi nel verso, con l'origine sempre sulla verticale del carico concentrato. Così facendo, le due soluzioni non saranno entrambe smorzate, quindi le due matrici $[\Delta]_C$ saranno di segno opposto, poiché



$$[\Delta]_C = [M] \{\Psi'\} \Rightarrow \{\Psi\} = [X] \{B e^{z/\lambda}\} \Rightarrow \{\Psi'\} = [X] \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \{B e^{z/\lambda}\}$$

$$[\Delta]_C^{II} = -[\Delta]_C^I$$

quindi,

$$\{\Delta\}_T^I = \{\Delta\}_F^I + [\Delta]_C^I \{B_I e^{-z_I/\lambda}\} \quad \{\Delta\}_T^{II} = \{\Delta\}_F^{II} - [\Delta]_C^{II} \{B_{II} e^{z_{II}/\lambda}\}$$

uguagliando si ha:

$$[\Delta]_C (\{B_I\} + \{B_{II}\}) = \{\Delta\}_F^{II}$$

2.

$$\{N\}_C^I = \{N\}_C^{II}$$

$$[L]_I [X]_I \{\Psi\}_I = [L]_{II} [X]_{II} \{\Psi\}_{II} \Rightarrow \{B\}_I = \{B\}_{II}$$

In definitiva, in tutti i casi in cui non si abbia variazione di sezione e una forza concentrata (attenzione: se fosse un momento flettente concentrato, bisognerebbe considerare anche la soluzione fondamentale!), si ottiene:

$$\text{a) } 2[\Delta]_C [B]_I = -\{\Delta\}_F^{II} \quad \text{b) } 2[\Delta]_C [B]_I = \{\Delta\}_F^{II}$$

Variazione di Sezione

Rientrano in questa categoria casi di:

1. Variazione di spessore di un pannello. Cambiano la matrice $[H]$, λ e $[X]$, quindi dobbiamo fare un nuovo calcolo degli autovalori (nel calcolo di $[H]$ usiamo la θ' , che dipende da t).
2. Variazione d'area di un corrente. Cambiano $[K]$ e λ , quindi dobbiamo calcolare nuovi autovalori.
3. Sparisce un pannello. Da m passiamo ad $m-1$, quindi cambiano le dimensioni delle matrici $[H]$ e $\text{diag}(I/Gt)$, non cambiano le dimensioni di $[\Delta]$. *È importante che la sezione rimanga chiusa, perché il problema d'estremità per una sezione aperta va trattato in maniera diversa.*
4. Sparisce un corrente. Da n si passa ad $n-1$, una sezione simile non può essere trattata, perché il numero delle incognite dipende dal numero dei correnti, quindi sulle due facce avrei un numero di incognite diverso. Il problema viene risolto considerando che il corrente ci sia ancora ma con un'area molto piccola (circa il 5% di A_0), in modo tale che il suo contributo su N e sulla flessione sia trascurabile.

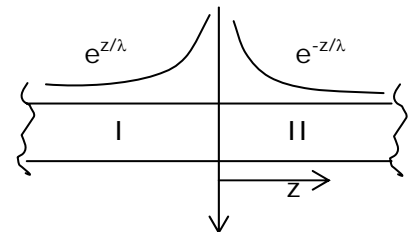
L'impostazione del problema è identica a quella del caso precedente. L'unica differenza consiste nel fatto che le autosoluzioni sono diverse da una parte all'altra della discontinuità.

Quindi imponiamo ancora una volta che le due facce a contatto siano uguali, e che le azioni assiali siano continue:

1.

$$\{\Delta\}_T^I = \{\Delta\}_T^{II}$$

$$\{\Delta\}_T^{II} = [\Delta]_C^{II} \{B\}_{II} \quad \{\Delta\}_T^I = \{\Delta\}_F^I - [\Delta]_C^I \{B\}_I$$



uguagliando si ha:

$$[\Delta]_C^I \{B\}_I + [\Delta]_C^{II} \{B\}_{II} = \{\Delta\}_F^{II}$$

Non si può più dire che sono uguali.

2.

$$\{N\}_C^I = \{N\}_C^{II}$$

attenzione che $\{N\}_F$ presenta una discontinuità se applichiamo un momento flettente.

Incastro non piano

I correnti dovranno subire un ingobbamento assegnato, la differenza con l'incastro piano sta nel termine noto, che in questo caso non è nullo:

$$[\Delta]_c \{B\} + \{\Delta\}_F = \{\bar{\Delta}\}$$

Assegnato il vettore degli spostamenti $\{\bar{s}\}$ uso la definizione d'ingobbamento,

$$\{\bar{\Delta}\} = [L]^T \{\bar{s}\}$$

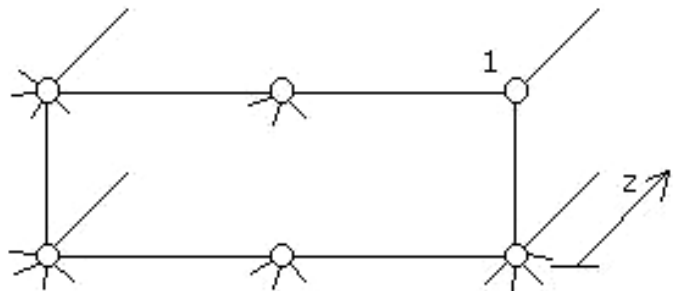
Correnti Liberi all'incastro piano

Supponiamo di avere come in figura $n=6$ correnti, di cui $p=5$ incastrati e solo $q=1$ libero.

Le autosoluzioni sono sempre le stesse, perché non dipendono dal problema d'estremità ma solo dalle caratteristiche della sezione.

In $z=0$, $N_T=0$ ($N_F+N_C=0$) sui q correnti liberi, quindi $\{N\}_C = [L][X]$.

Inoltre i p correnti vincolati devono restare sul piano, cioè $\{\Delta\}=0$. Questo $\{\Delta\}$ deve lavorare solo sui p correnti e non deve tirare in ballo lo spostamento dei correnti liberi,



$$\{\tilde{\Delta}\} = [\tilde{L}]\{s\} \quad [\tilde{L}] \text{ deve essere autoequilibrata e con } N_q = 0$$

Per determinare $[\tilde{L}]$ usiamo le 3 equazioni di equilibrio e le q equazioni $N_q = 0$, quindi in totale abbiamo $3+q$ equazioni. I sistemi che otteniamo non saranno più $n-3$, ma bensì $n-3-q$.

Dopo aver determinato la matrice $[\tilde{L}]$, possiamo andare a costruire la matrice $[\tilde{H}]$, infine,

$$\{\tilde{\Delta}\}_F = [\tilde{H}]^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right)\{q\}_F \quad \{\tilde{\Delta}\}_C = [\tilde{H}]^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right)[H][X] \text{diag}\left(-\frac{1}{\lambda}\right) = [\tilde{H}]^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right)\{q\}_C$$

Le due matrici $[H]$ sono diverse.

lavoriamo su n-4 correnti ma le incognite sono n-3. Il sistema finale è,

$$\begin{cases} \{\tilde{\Delta}\}_F + [\tilde{\Delta}]_C \{B\} = 0 \\ N_T = 0 \end{cases}$$

Se l'incastro non è piano il sistema di equazioni diventa,

$$\begin{cases} \{\tilde{\Delta}\}_F + [\tilde{\Delta}]_C \{B\} = \{\bar{\Delta}\} \\ N_T = 0 \end{cases}$$

Ipotesi:

$$\{N\}_T = \{N\}_F + \{N\}_C \quad \{q\}_T = \{q\}_F + \{q\}_C$$

aggiungendo la soluzione correttiva a quella fondamentale, cambia la distribuzione degli sforzi e anche la deformazione della sezione, quindi il lavoro di deformazione.

$$\delta L_d = \int \left(\frac{T_z T'_z}{EA} + \frac{M_x M'_x}{EJ_x} + \frac{M_y M'_y}{EJ_y} + \frac{T_x T'_x}{GA_x^*} + \frac{T_y T'_y}{GA_y^*} + \frac{M_z M'_z}{GJ_t} \right) dz \quad \text{schema a trave (1)}$$

$$\delta L_d = \int \left(\{N\}^T \text{diag} \left(\frac{1}{EA} \right) \{N'\} + \{q\}^T \text{diag} \left(\frac{l}{Gt} \right) \{q'\} \right) dz \quad \text{schema a semiguscio (2)}$$

Se vogliamo calcolare δL_d tenendo conto dei problemi di estremità, dobbiamo usare la forma (2), la forma (1) invece, vale solo nelle ipotesi di De Saint Venant e non comprende le azioni correttive.

Se consideriamo solo la soluzione fondamentale, ci conviene usare lo schema (1) per la prima parte (perché abbiamo un solo termine), per la seconda parte possiamo usare lo schema (1) se conosciamo J_t e A^* , altrimenti dobbiamo usare lo schema (2) e i flussi.

Nello schema (2), $\{N\}^T$ e $\{q\}^T$ sono totali e non fondamentali, inoltre, i sistemi fittizi $\{N'\}$ e $\{q'\}$ non devono essere congruenti ma soltanto equilibrati, quindi non è necessario considerare la parte correttiva oltre a quella fondamentale:

$$\{N'\} = \{N'\}_F \quad \{q'\} = \{q'\}_F$$

$$\delta L_d = \int \left(\left(\{N\}_F^T + \{N\}_C^T \right) \text{diag} \left(\frac{1}{EA} \right) \{N'\}_F + \left(\{q\}_F^T + \{q\}_C^T \right) \text{diag} \left(\frac{l}{Gt} \right) \{q'\}_F \right) dz$$

Se dobbiamo calcolare la matrice di flessibilità per problemi di estremità, dobbiamo usare questa forma di δL_d per il PLVC.

Problemi di estremità per sezioni aperte

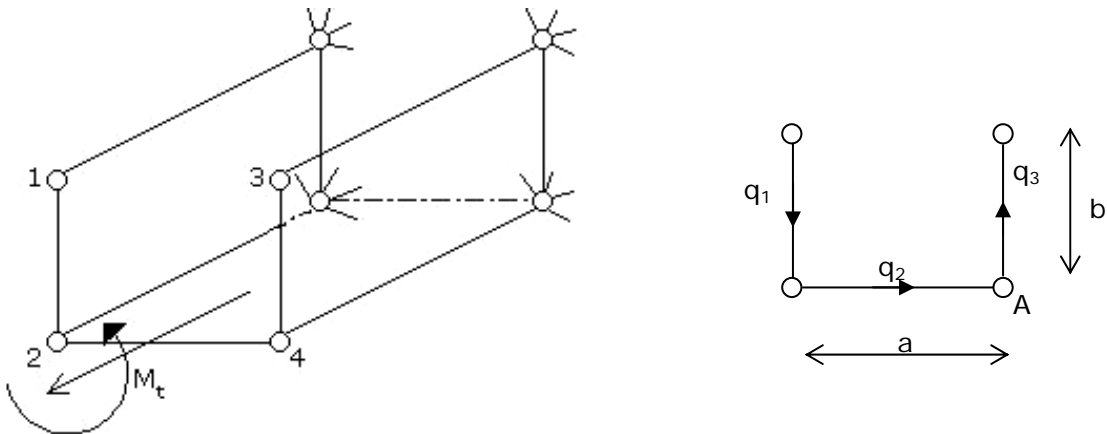
Se applichiamo un momento torcente M_z alla sezione aperta, non siamo in grado di scrivere l'equilibrio.

Le deformate sono così grandi che, dovremmo scrivere l'equilibrio per una configurazione talmente deformata rispetto a quella iniziale, da diventare inesistente dal nostro punto di vista.

La sezione aperta non tiene a torsione. Per trovare una soluzione se l'estremità è incastrata si passa alla flessione differenziale.

Flessione Differenziale

Abbiamo una sezione di questo tipo:



L'equilibrio ci dice che,

$$\begin{cases} R_x = 0 & \Rightarrow & q_2 = 0 \\ R_y = 0 & \Rightarrow & q_1 = q_3 \\ M_{z(A)} = 0 & \Rightarrow & 2q_1 \frac{ab}{2} = M_t \end{cases}$$

$$q_1 = q_3 = \frac{M_t}{ab}$$

Questi flussi resistono al momento torcente M_t e nascono dalle azioni assiali nei correnti:

$$\varphi_1 = -\frac{dN_1}{dz} = \frac{M_t}{ab} \Rightarrow \int_0^z dN_1 = \int_0^z -\frac{M_t}{ab} dz \Rightarrow N_1 = -\frac{M_t}{ab} z$$

da cui,

$$N_2 = \frac{M_t}{ab} z \quad N_3 = -\frac{M_t}{ab} z \quad N_4 = \frac{M_t}{ab} z$$

Nelle sezioni chiuse M_t genera un flusso circolante, nelle sezioni aperte, invece, nascono delle azioni assiali nei correnti.

Si tratta di un problema di estremità: se non ci fosse l'incastro, non potremmo avere le azioni assiali nei correnti. Per trovare la soluzione, abbiamo considerato la presenza dell'incastro anche se non in modo esplicito.

Non abbiamo soluzione fondamentale ma solo correttiva, e si chiama flessione differenziale, perché è come se i due pannelli verticali fossero sottoposti a flessione in senso opposto.

Il caso che abbiamo affrontato a 3 soli pannelli, quindi con le tre equazioni di equilibrio siamo riusciti a risolverlo. Ma se abbiamo una sezione aperta con più di 3 pannelli allora, siamo costretti ad utilizzare anche delle condizioni di congruenza.

Tema d'esame del 16-1-1996

Dati:

$$F = 700 \text{ kg}$$

$$t = 1.2 \text{ mm}$$

$$b = 600 \text{ mm}$$

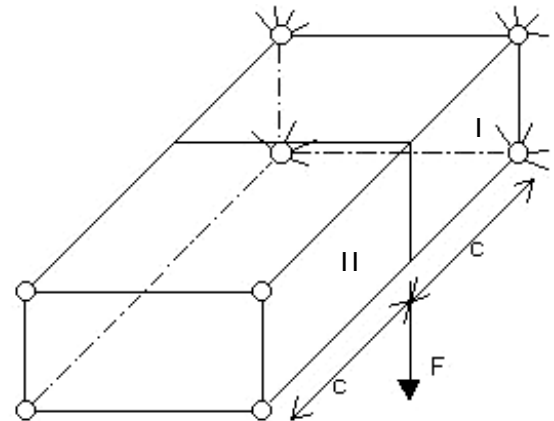
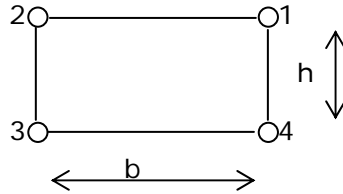
$$c = 350 \text{ mm}$$

$$h = 250 \text{ mm}$$

$$A = 350 \text{ mm}^2$$

$$E = 7200 \text{ kg/mm}^2$$

$$G = 2800 \text{ kg/mm}^2$$

Soluzione fondamentale:

Posizioniamo l'asse z sul corrente 4, così facendo non c'è momento torcente M_z , le altre azioni interne saranno:

$$\begin{aligned} T_y^I &= -F & T_y^{II} &= 0 \\ M_x^I &= F(c-z) & M_x^{II} &= 0 \end{aligned}$$

Sulla trave I, la soluzione fondamentale ha taglio costante e momento flettente lineare.

Sulla trave II, la soluzione fondamentale è nulla.

Soluzione di estremità:

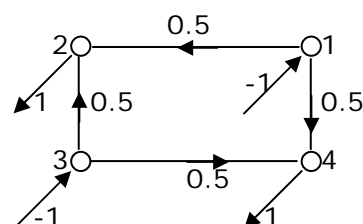
Trave I \Rightarrow incastro perfetto.

Trave II \Rightarrow estremo libero.

Interfaccia \Rightarrow carico concentrato senza variazione di sezione.

Andiamo a cercare le matrici $[L]$ ed $[H]$. In questo dato che $n=4$, ci sarà solo un sistema autoequilibrato, ed è banalmente,

$$[L] = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad [H] = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{Bmatrix}$$



Le matrici $[K]$ ed $[M]$ saranno questa volta degli scalari:

$$[K] = [L]^T \text{diag}\left(\frac{1}{EA}\right) [L] = \frac{4}{EA}$$

$$[M] = [H]^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right) [H] = \frac{425}{Gt}$$

dobbiamo imporre che il determinante della matrice $(\lambda^2[K] - [M])$ sia nullo, cioè

$$\lambda = \sqrt{\frac{425}{4} \frac{EA}{Gt}} = 282.29$$

Abbiamo potuto notare che l'autosoluzione è antisimmetrica, quindi la sezione genera problemi d'estremità solo se il carico è antisimmetrico, perché il carico simmetrico darebbe lavoro nullo⁵.

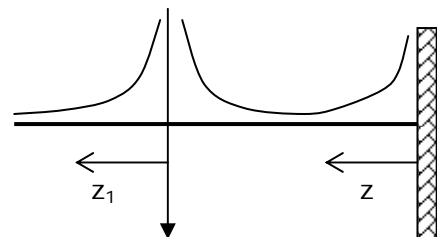
Nel calcolo dei flussi, possiamo dividere il carico in una parte simmetrica ed in una antisimmetrica, e prendere in considerazione solo quella antisimmetrica. I flussi generati dal taglio F sono simmetrici, quindi non li prenderemo in esame. Calcoliamo solo quelli associati a M_t :

$$M_t = F \frac{b}{2} = 2.1 \cdot 10^5 \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{M_t}{2\Omega} = -0.7$$

$$\{q\}_F^I = \begin{Bmatrix} -0.7 \\ -0.7 \\ -0.7 \\ -0.7 \end{Bmatrix} \quad \{q\}_F^{II} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

le soluzioni generali saranno:

$$\begin{cases} \text{trave I} & \Psi_I = Ce^{-z/\lambda} + De^{z/\lambda} \\ \text{trave II} & \Psi_{II} = Ee^{-z_1/\lambda} + Fe^{z_1/\lambda} \end{cases}$$



⁵ Bisogna stare attenti alla simmetria e all'antisimmetria, non solo del carico ma anche dei vincoli.

Infatti, se un corrente è libero, non abbiamo più la simmetria della sezione e dobbiamo considerare tutte le soluzioni contemporaneamente senza semplificazioni, e risolvere la condizione sull'ingobbamento della sezione.

Ma c'è un'eccezione, se abbiamo a che fare con una sezione a 4 correnti, anche se c'è né uno libero, gli altri tre vincolati resteranno comunque sullo stesso piano, quindi la soluzione correttiva sarà nulla.

questo sistema si compone di $2(n-3) \times 2$ equazioni, quindi dobbiamo trovare $4(n-3)$ condizioni al contorno:

1. $\{\Delta\}_{T(z=0)}^I = 0^6$.
2. $\{\Delta\}_{C(z=c)}^I + \{\Delta\}_{F(z=c)}^I = \{\Delta\}_{C(z_1=0)}^{II} + \{\Delta\}_{F(z_1=0)}^{II}$
3. $\{N\}_{I(z=c)}^I = \{N\}_{I(z_1=0)}^{II}{}^7$.
4. $\{N\}_{I(z_1=c)}^{II} = 0$.

Andiamo ad esplicitare le condizioni al contorno trovate:

1.

$$\{\Delta\}_F^I + \{\Delta\}_C^I = 0$$

$$\{\Delta\}_F^I = [H]^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right) \{q\}_F^I = \frac{245}{Gt}$$

$$\{\Delta\}_C^I = [H]^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right) \{q\}_C^I = [H]^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right) [H] \{\Psi'\}^I$$

quest'ultima calcolata in $z=0$, ci dà:

$$\{\Delta\}_C^I = [H]^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right) [H] \left\{ -\frac{C}{\lambda} + \frac{D}{\lambda} \right\} = \frac{425}{Gt} \left(-\frac{C}{\lambda} + \frac{D}{\lambda} \right)$$

Di solito è un vettore

la condizione finale sarà:

$$\frac{425}{Gt} \left(-\frac{C}{\lambda} + \frac{D}{\lambda} \right) = \frac{245}{Gt} \Rightarrow C - D = 162.73$$

2.

la $\{\Delta\}_F^I$ in $z=c$ è uguale alla $\{\Delta\}_F^I$ in $z=0$, perché $\{q\}_F^I$ è costante su tutta la trave l , quindi

$$\{\Delta\}_{F(z=c)}^I = \frac{245}{Gt}$$

⁶ Se avessimo un ingobbamento fissato scriveremmo la condizione: $\{\Delta\}_{T(z=0)}^I = \{\bar{\Delta}\}$.

⁷ Se in $z=0$, avessimo al posto dell'incastro perfetto un corrente libero la condizione sarebbe: $\{N\}_{I(z=0)}^I = 0$.

$$\{\Delta\}_{C(z=c)}^I = [H]^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right) [H] \{\Psi'\}_{(z=c)}^I = \frac{425}{Gt} \left(-\frac{C}{\lambda} e^{-c/\lambda} + \frac{D}{\lambda} e^{c/\lambda} \right)$$

$$\{\Delta\}_{F(z_1=0)}^{II} = 0 \quad \text{perché} \quad \{q\}_F^{II} = 0$$

$$\{\Delta\}_{C(z_1=0)}^{II} = [H]^T \text{diag}\left(\frac{l}{Gt}\right) [H] \{\Psi'\}_{(z_1=0)}^{II} = \frac{425}{Gt} \left(-\frac{E}{\lambda} + \frac{F}{\lambda} \right)$$

la condizione finale sarà:

$$\frac{245}{Gt} + \frac{425}{Gt} \left(-\frac{C}{\lambda} 0.289 + \frac{D}{\lambda} 3.455 \right) = \frac{425}{Gt} \left(-\frac{E}{\lambda} + \frac{F}{\lambda} \right)$$

$$162.73 - 0.289C + 3.455D = -E + F$$

3.

$$\{N\} = [L] \{\Psi\}$$

e dato che $N_F=0$, dobbiamo usare solo la parte correttiva:

$$N_{1(z=c)}^I = -1 \cdot \Psi_I = -(0.289C + 3.455D)$$

$$N_{1(z_1=0)}^{II} = -1 \cdot \Psi_{II} = -(E + F)$$

la condizione sarà:

$$E + F = 0.289C + 3.455D$$

4.

la condizione ci dà direttamente:

$$0.289E + 3.455F = 0$$

Alla fine si ottiene un sistema di 4 equazioni nelle 4 incognite C,D,E ed F:

$$\begin{cases} C - D = 162.73 \\ -0.289C + 3.455D = -E + F - 162.73 \\ 0.289C + 3.455D = E + F \\ 0.289E + 3.455F = 0 \end{cases}$$

che risolto dà le soluzioni:

$$C = 140.247 \quad D = -22.54 \quad E = -40.77 \quad F = 3.41$$

All'incastro avremo, sapendo che $J_x = 21.875 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$:

$$M_x = F \cdot c = 245 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

$$N_{1F} = \frac{FcS_{x1}}{J_x} = 490 \text{ kg} \quad N_{2F} = 490 \text{ kg} \quad N_{3F} = -490 \text{ kg} \quad N_{4F} = 490 \text{ kg}$$

e sapendo che $N_{iC} = L_i \Psi_i$, le azioni assiali all'incastro saranno:

$$N_{1T} = 490 - 140.247 + 22.54 = 372.29 \text{ kg}$$

$$N_{2T} = 490 + 140.247 - 22.54 = 607.7 \text{ kg}$$

$$N_{1T} = -490 - 140.247 + 22.54 = -607.7 \text{ kg}$$

$$N_{1T} = -490 + 140.247 - 22.54 = -372.29 \text{ kg}$$

si noti che la soluzione correttiva è il 30% della soluzione fondamentale, perché la trave è tozza, quindi l'effetto della soluzione correttiva è notevole. In $z=100 \text{ mm}$, questo effetto dovrebbe diminuire:

$$N_{2F} = \frac{250FS_{x2}}{J_x} = 350 \text{ kg} \Rightarrow N_{2T} = 350 + 140.247e^{-100/282} - 22.54e^{100/282} = 416 \text{ kg}$$

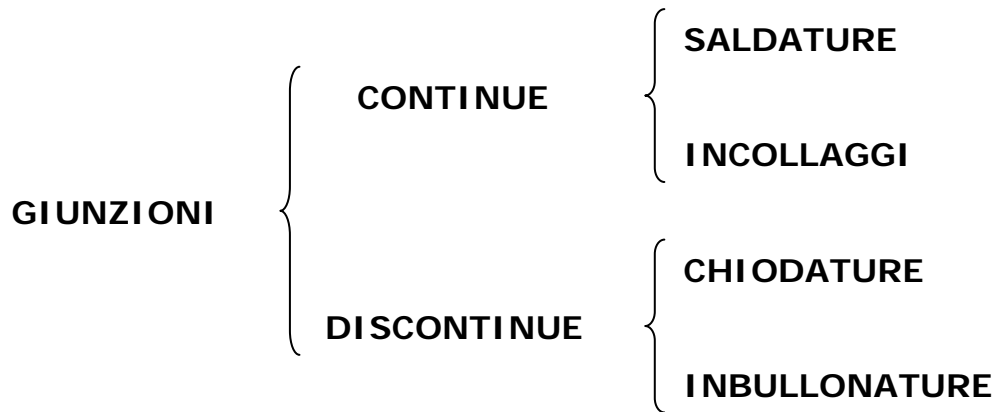
Il peso della soluzione correttiva si è ridotta al 18% di quella fondamentale, l'effetto si è ridotto perché ci siamo allontanati dalla sezione d'estremità. Per quanto riguarda i flussi all'incastro, si ha:

$$\left. \begin{aligned} \{q\}_F &= \{-0.7 \quad -0.7 \quad -0.7 \quad -0.7\}^T \\ \{q\}_C &= [H]\{\Psi'\}^T = \{0.21 \quad -0.21 \quad 0.21 \quad -0.21\}^T \end{aligned} \right\} \{q\}_T = \begin{Bmatrix} -0.49 \\ -0.91 \\ -0.49 \\ -0.91 \end{Bmatrix}$$

la soluzione correttiva è il 20% di quella fondamentale.

Giunzioni

I diversi pezzi (pannelli, correnti, diaframmi) vengono assemblati tramite le giunzioni. Una fase importante della progettazione consiste nel determinare le forze agenti nella zona della giunzione



Giunzioni continue

Nelle giunzioni continue, gli sforzi si distribuiscono in modo continuo lungo la linea di giunzione.

Saldature

Effettuare la saldatura di materiali significa scegliere dei materiali che possono essere saldati, infatti, non tutti i materiali possono subire una saldatura.

Le leghe leggere d'alluminio sono saldabili, al contrario di quanto si pensa, ma hanno caratteristiche di resistenza modeste, quindi la saldatura si può fare ma non è efficiente, perché gli sforzi che può sostenere sono bassi.

Se cerchiamo più la rigidità che non la resistenza, possiamo effettuare la saldatura delle leghe d'alluminio, perché in questo caso quello che c'interessa è la deformazione e non lo sforzo.

Nelle strutture aeronautiche si lavora in prossimità dello spazio di snervamento. Lo snervamento del chiodo è ammesso come standard di funzionamento, questo ci fa capire che lavorando nel campo plastico della struttura non dobbiamo dimensionare a rigidità ma a sforzo.

Allora se conta la resistenza, andremo a fare delle saldature in acciaio e non più in alluminio.

Incollaggi

In questo tipo di giunzioni abbiamo il vantaggio di comportarsi molto bene a fatica, in quanto produce delle basse concentrazioni di sforzo.

Ma gli svantaggi sono: 1) la colla riesce a sopportare sforzi molto bassi e non garantisce l'integrità del pezzo; 2) il campo di temperature di funzionamento è piccolo⁸.

L'incollaggio viene effettuato quando non si possono fare chiodature o quando è necessaria la perfetta tenuta dell'aria.

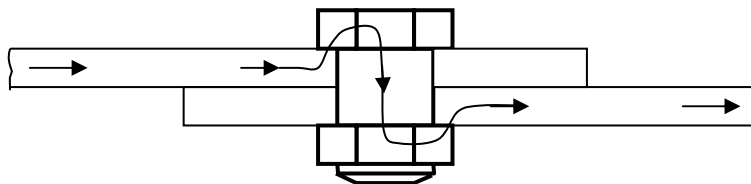
Giunzioni discontinue

Le giunzioni discontinue sono meno resistenti delle giunzioni saldate, e gli sforzi si trasmettono attraverso un numero discreto di punti.

Imbullonatura

Permette lo smontaggio, il bullone lavora ad azione assiale e gli sforzi si trasmettono per attrito.

Con il serraggio aumentiamo il gioco iniziale tra il gambo e il foro. Il gambo è soggetto ad azione assiale. Gli sforzi si trasmettono tramite l'attrito tra la testa e il 1° pannello, e tra il dado e il 2° pannello.



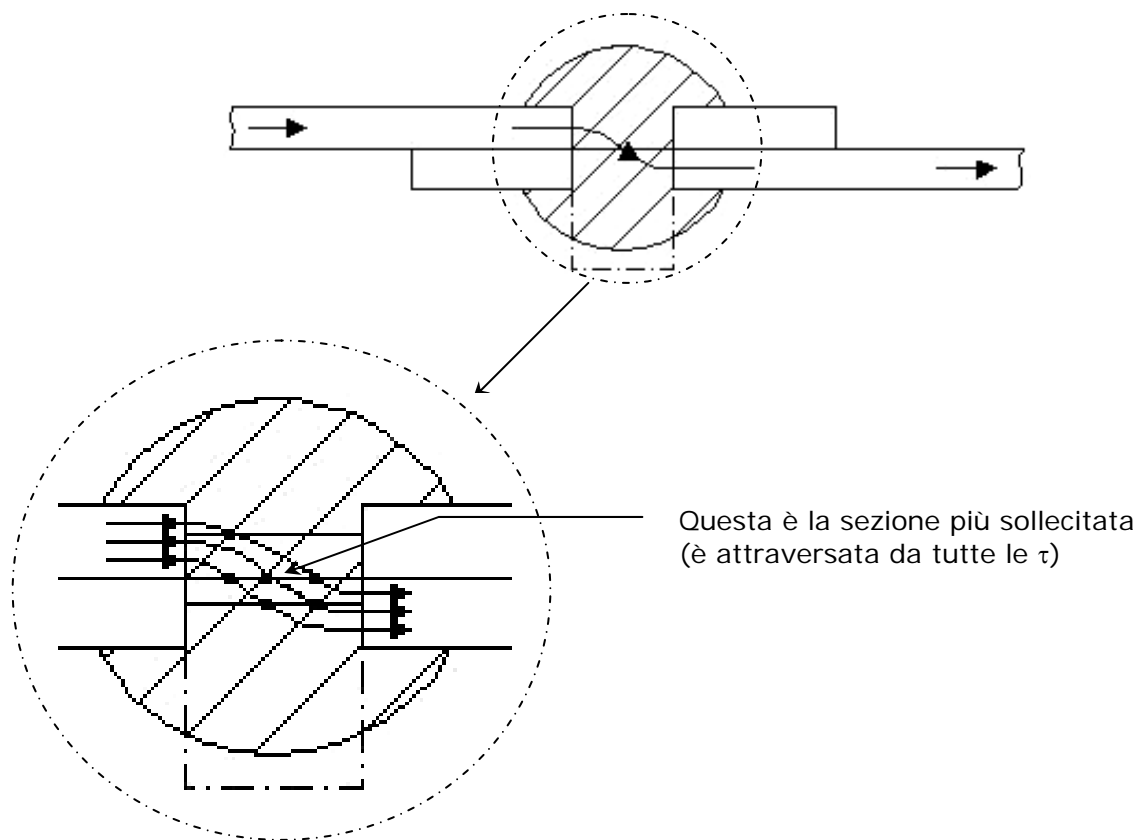
⁸Comunque esistono delle colle particolari e molto costose che risolvono il problema del campo ristretto di temperature d'esercizio.

Chiodatura

Non permette lo smontaggio, il chiodo lavora a taglio.

Usiamo il rivetto se possiamo accedere al pezzo solo da una parte, e l'efficienza del rivetto è bassa. Se possiamo accedere da entrambi le parti al pezzo useremo il ribattino.

Con la ribatitura annulliamo l'iniziale gioco tra il gambo e il foro. Il gambo lavora a taglio puro (la sezione circolare del gambo è soggetta a taglio).



Dimensionamento per chiodi e bulloni

Vediamo ora come fare per realizzare un buon dimensionamento del foro. Consideriamo un chiodo ed un bullone con la stessa sezione, e dello stesso materiale. Supponiamo che lavorino con la stessa σ_{am} .

Chiodo:

dalle tabelle sperimentali ricaviamo:

$$\tau_{\max} = \frac{5.5}{\pi d^2} T$$

$$F_{\max, trasmessa} = \frac{\tau_{\max} \pi d^2}{5.5} \equiv T$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{\sqrt{3}} \quad \leftarrow \text{Per il criterio di Von Mises}$$

$$F_{chiodo} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 5.5} \sigma_{\max} \pi d^2 = 0.1 \sigma_{\max} \pi d^2$$

Bullone:

$$F_{\max, gambo} = \sigma_{\max} \frac{\pi d^2}{4}$$

la forza che possiamo trasmettere dal pannello al gambo è legata all'attrito:

$$F_{\max, trasmessa} = \mu \sigma_{\max} \frac{\pi d^2}{4} \cong 0.1 \sigma_{\max} \frac{\pi d^2}{4}$$

$$F_{bullone} = \frac{0.1}{4} \sigma_{\max} \pi d^2$$

Queste considerazioni ci fanno capire che:

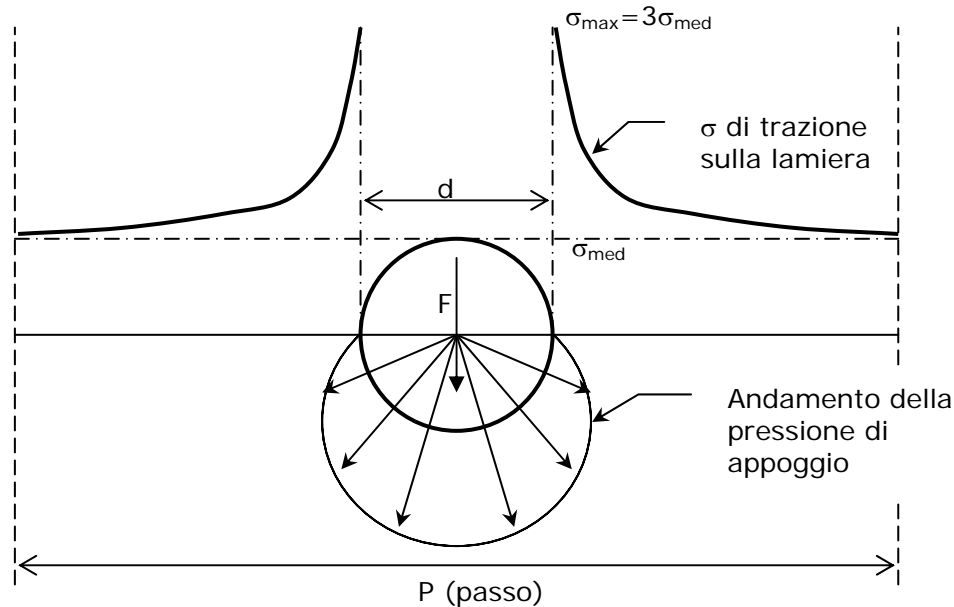
$$F_{chiodo} = 4 F_{bullone}$$

La chiodatura regge 4 volte in più rispetto alla imbullonatura. I chiodi sono in lega d'alluminio, i bulloni in acciaio perché la σ_{am} risulta più elevata e ci serve per compensare il fatto che la forza trasmessa dal bullone è piccola rispetto a quella del chiodo.

La vite non può lavorare a taglio, se avvenisse ciò significherebbe che le lamiere si sono spostate e la rottura avverrebbe a flessione.

Anche la vite filettata lavora per attrito e a trazione.

È interessante comprendere quale sia lo stato di sforzo nella lamiera in corrispondenza del foro:



Si può dimostrare analiticamente che, quando $P/d \rightarrow \infty$, per la σ_{\max} , sul bordo, tende a 3 volte il suo valore asintotico (che non è poco)⁹.

Volendo realizzare una $\sigma < \sigma_{\text{snervamento}}$, si otterrebbe un dimensionamento esuberante, non consono alle nostre esigenze di riduzione dei pesi.

Quello che in pratica si fa, allora, contando sul fatto che la σ rimane praticamente costante in campo plastico, è far lavorare il foro in campo plastico ad una σ costante e prefissata (per esempio la σ di snervamento).

Rottura

Si possono avere diversi tipi di meccanismo di rottura:

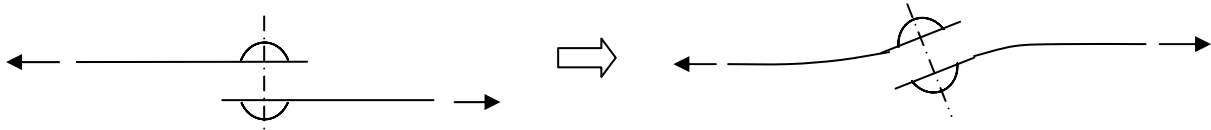
- 1) cedimento a taglio del chiodo;
- 2) rifollamento della lamiera;
- 3) lacerazione della lamiera.

La rottura del chiodo avviene a taglio, e tipicamente ciò accade quando il diametro del chiodo d è relativamente piccolo rispetto allo spessore t della lamiera.

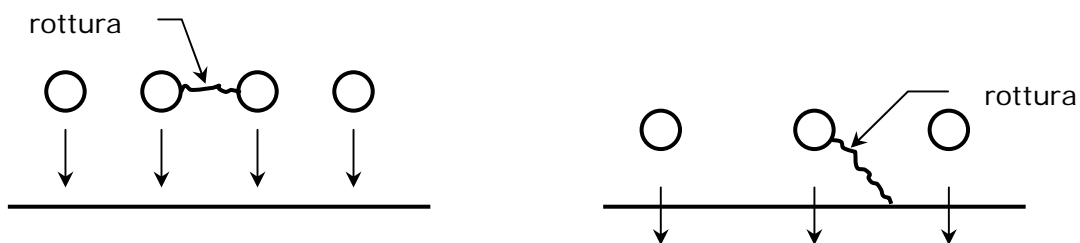
Un'altra tipica modalità di rottura delle giunzioni chiodate, che però interessa la lamiera, è quella che avviene per rifollamento. Il chiodo deforma la lamiera,

⁹ Con la plasticizzazione si eliminano i picchi nella distribuzione della σ , e si fa in modo che il suo valore non superi mai la σ_{sn} . Questo implica che la distribuzione effettiva della σ è più uniforme di quella teorizzata anche se l'integrale risulta identico.

perdiamo così il contatto tra il chiodo e la lamiera, il chiodo non lavora più a taglio puro ma anche a flessione, e cede. Questo avviene quando il diametro del foro d è maggiore dello spessore t del pannello.



Infine, la rottura della lamiera può avvenire o perché i fori sono troppo vicini tra loro, oppure perché sono troppo vicini al bordo della lamiera.



Flussi di taglio e Forze nelle giunzioni

Nei nostri modelli semplificativi, le giunzioni vengono assimilate a linee, che lavorano a taglio nel senso della loro lunghezza.

In particolare considereremo:

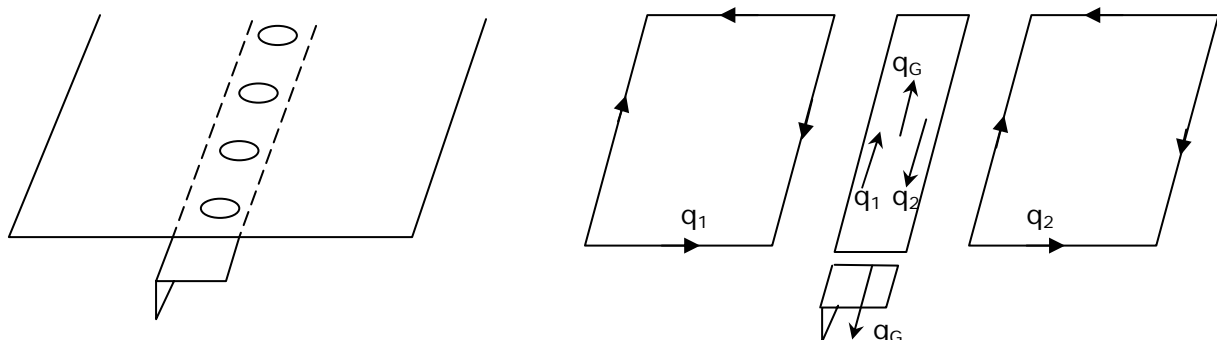
a) giunzioni longitudinali (rispetto all'asse della trave):

1. pannello-corrente;
2. pannello-pannello;

b) giunzioni trasversali:

1. pannello-diaframmi;
2. pannello-pannello.

Andiamo a calcolare il flusso di taglio in ciascuna di queste giunzioni.

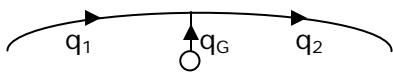


$$q_G = -\frac{dN}{dz}$$

$$q_2 - q_1 - q_G = 0 \Rightarrow q_G = q_2 - q_1$$

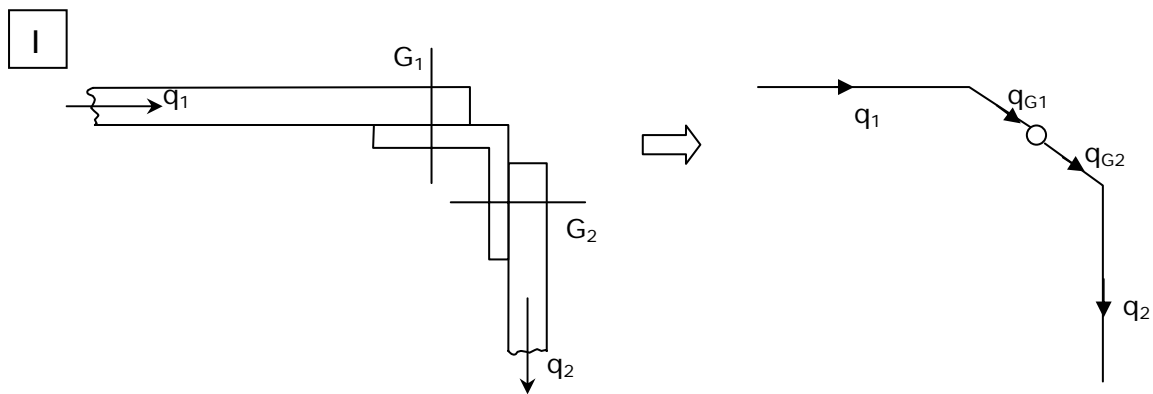
cioè, se si sono calcolati già i flussi nei pannelli, q_G si calcola immediatamente, senza dover ricorrere all'equazione dei flussi sorgenti.

È interessante notare che si sarebbe potuto giungere allo stesso risultato ricorrendo ad una semplice analogia idraulica:

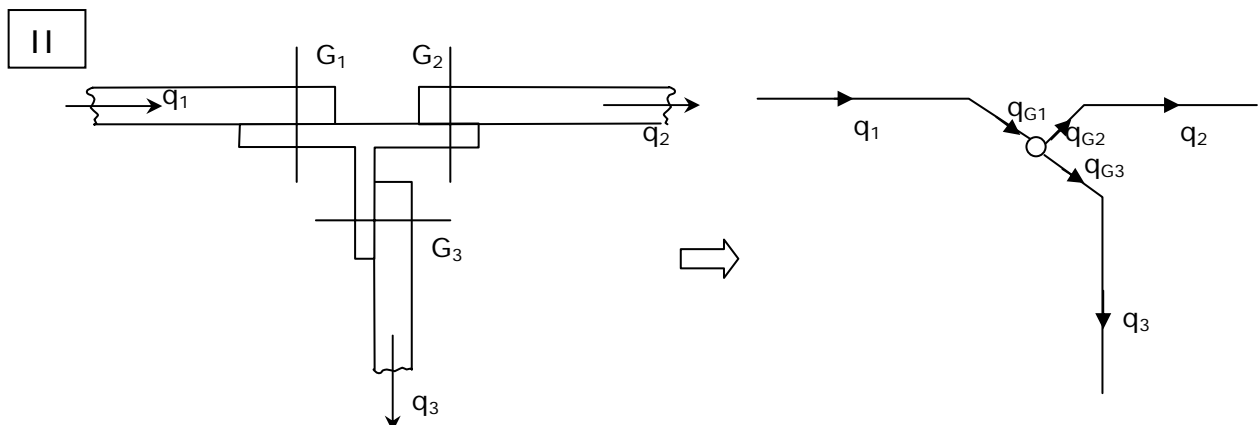


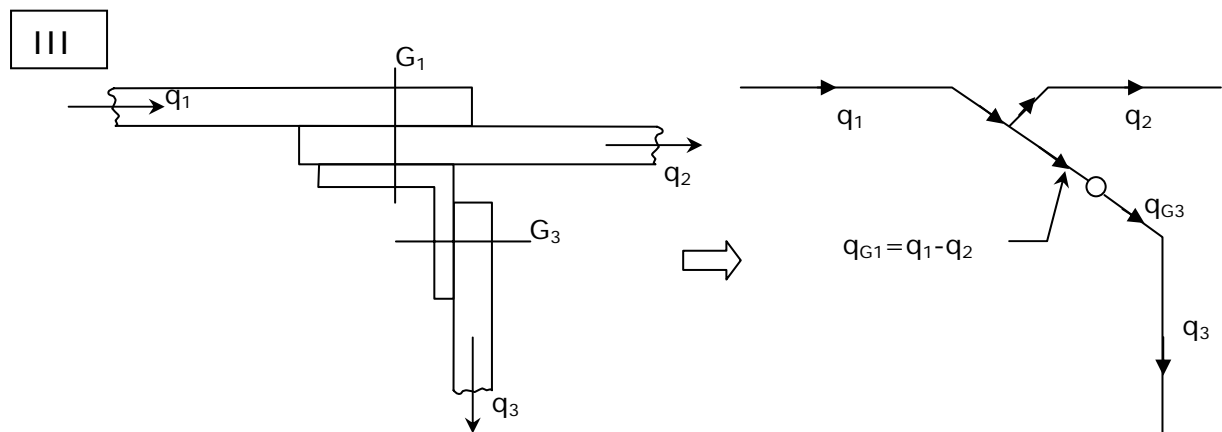
$$q_2 = q_1 + q_G \Rightarrow q_G = q_2 - q_1$$

Si possono anche analizzare situazioni più complesse:



$$q_{G1} = q_1 \quad q_{G2} = q_2$$

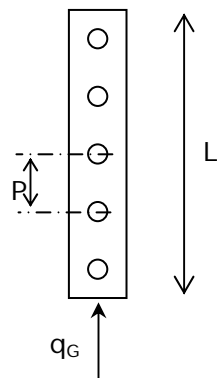




Ci proponiamo di andare a calcolare le forze agenti sui singoli elementi di giunzione:

I. 1 Fila:

Una giunzione chiodata gode di simmetria per traslazione, che non è applicabile solo agli elementi (chiodi) estremi:

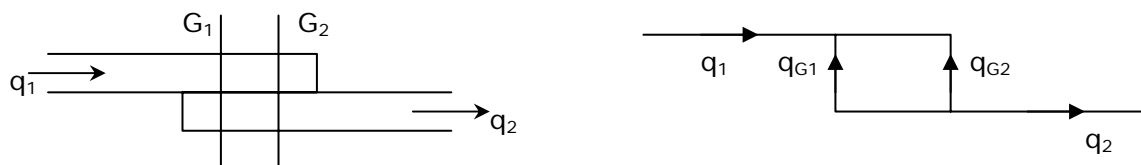


$$L = N \cdot P \quad F_{Tot} = q_G \cdot L$$

$$F = \frac{F_{Tot}}{N} = \frac{q_G \cdot L}{N} = q_G \cdot P$$

$$F = q_G \cdot P$$

II. 2 File:



Le due linee verticali non rappresentano dei pannelli ma servono per indicare le giunzioni.

Se vogliamo trasmettere il flusso q da una pannello all'altro, otteniamo uno schema simmetrico per rotazione, ma il carico è antisimmetrico. Se lo spessore dei pannelli è lo stesso, allora per simmetria, otteniamo $q_1 = q_2$ e dall'equilibrio dei flussi, $q_1 + q_2 = q$, ricaviamo che:

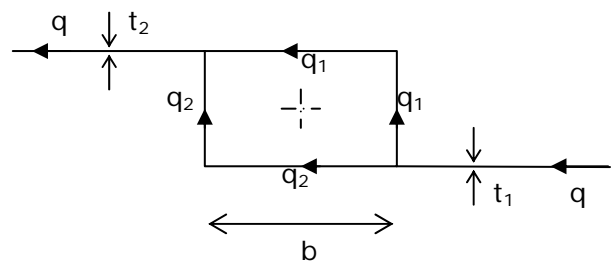
$$q_1 = q_2 = \frac{q}{2} \Rightarrow F_{chiodo} = q_G \cdot P = \frac{1}{2} qP$$

$$F = \frac{1}{2} qP$$

III. 2 File non simmetriche:

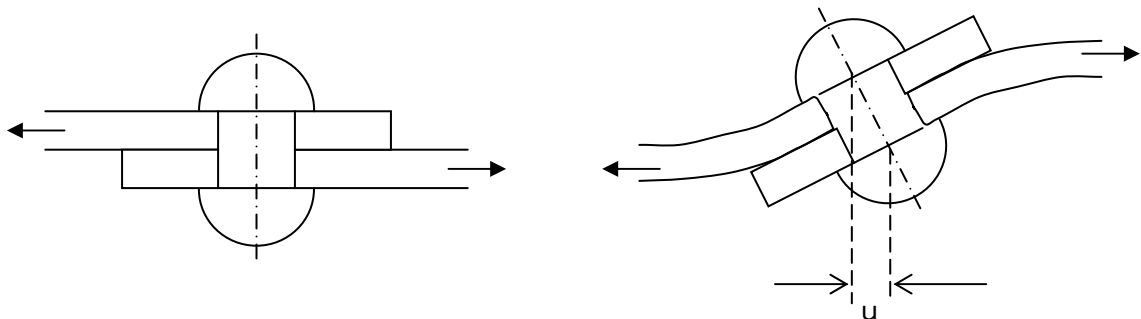
Se i due pannelli hanno spessore diverso, lo schema è uguale ma non c'è più simmetria. L'equilibrio ci dà sempre, $q_1 + q_2 = q$.

La struttura è iperstatica, la distribuzione dei flussi dipende dalla deformabilità dei diversi pezzi, dobbiamo aggiungere all'equazione di equilibrio, l'equazione di congruenza usando il teorema di Menabrea:



$$V_d = V_{d,pannelli}(q) + V_{d,pannelli}(q_1, q_2) + V_{d,chiodature}$$

$$V_d = V_{d,pannelli}(q) + \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2 b}{Gt_1} + \frac{q_2^2 b}{Gt_2} \right) + V_{d,chiodature}$$



$$F_{trasmessa} = ku \quad V_d = \frac{1}{2} Fu = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$$

Lo spostamento u non è bene definito, ma mi basta conoscere il coefficiente k per risolvere ogni problema.

La rigidezza di un chiodo k può essere valutata sperimentalmente. Prendiamo in esame un provino per la prova a taglio, e applichiamo una forza T , se i serraggi sono molto rigidi possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}Ts = V_{d, lamiera} + V_{d, chiodi}$$

$$V_{d, lamiera} = \frac{1}{2} 2btl \tau \gamma = \frac{T^2}{l^2 t^2} \frac{btl}{G} = \frac{T^2 b}{Glt}$$

e sapendo che $\tau = \frac{T}{lt}$, $F = \frac{T}{N} = T \frac{P}{l}$, si ottiene:

$$V_{d, chiodi} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k} N = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k} \frac{l}{P} = \frac{1}{2} \frac{T^2 P}{kl}$$

uguagliando si ha,

$$\frac{1}{2}Ts = \frac{T^2 b}{Glt} + \frac{1}{2} \frac{T^2 P}{kl}$$

e da quest'ultima relazione è possibile ricavare il valore di k .

Esistono, comunque, delle relazioni empiriche di k , e noi andremo ad utilizzare la formula di Huth:

$$\frac{1}{k} = \frac{1.1}{E} \left(\frac{4}{t_1} + \frac{3}{t_2} \right) \left(\frac{t_2 + t_1}{2d} \right)^{2/5}$$

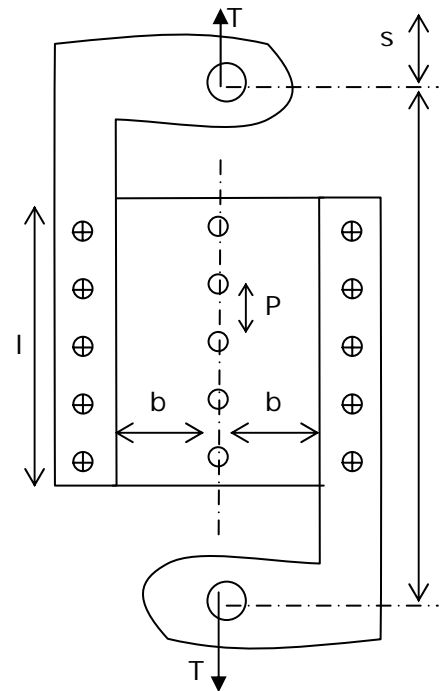
$t_2 > t_1$ ↗ ↖ Diametro del rivetto

Nel nostro caso, l'energia $V_{d, chiodature}$ diventa:

$$V_{d, chiodature} = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k} N = \frac{1}{2} \frac{q_G^2 P^2}{k} \frac{l}{P} \stackrel{l=1}{=} \frac{1}{2} \frac{q_G^2 P}{k}$$

L'energia totale sarà:

$$V_d = V_{d, pannelli}(q) + \frac{1}{2} \left(\frac{q_1^2 b}{Gt_1} + \frac{q_2^2 b}{Gt_2} \right) + \frac{1}{2} \frac{P}{k} (q_1^2 + q_2^2)$$



$$V_d = V_{d,p}(q) + \frac{1}{2} \frac{b}{Gt_1} \left(q_1^2 + \frac{t_1}{t_2} q_2^2 + \frac{t_1 GP}{bk} (q_1^2 + q_2^2) \right)$$

ma poiché $q = q_1 + q_2 \Rightarrow q_2 = q - q_1$, e ponendo $\beta = \frac{t_1}{t_2}$ e $\alpha = \frac{t_1 GP}{bk}$,

Rapporto di rigidezza
tra lamiera e chiodo

$$V_d = V_{d,p}(q) + \frac{1}{2} \frac{b}{Gt_1} \left(q_1^2 + \beta (q - q_1)^2 + \alpha (q_1^2 + (q - q_1)^2) \right)$$

Adesso, minimizziamo l'energia di deformazione:

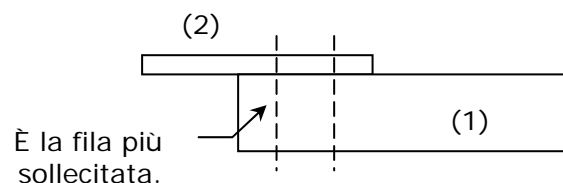
$$\frac{\partial V_d}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow 2q_1 - 2\beta(q - q_1) + 2\alpha q_1 - 2\alpha(q - q_1) = 0$$

$$(2 + 4\alpha + 2\beta)q_1 = (2\alpha + 2\beta)q$$

$$q_1 = \frac{\alpha + \beta}{1 + 2\alpha + \beta} q \quad q_2 = \frac{1 + \alpha}{1 + 2\alpha + \beta} q$$

Se i pannelli hanno lo stesso spessore, $\beta=1$ e $q_1=q_2=1/2q$, il flusso si distribuisce in parti uguali sulle due file di chiodi.

$$\begin{cases} t_1 = t_2 & \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2}q \\ t_1 > t_2 & \Rightarrow q_1 < \frac{1}{2}q \\ t_1 < t_2 & \Rightarrow q_1 > \frac{1}{2}q \end{cases}$$



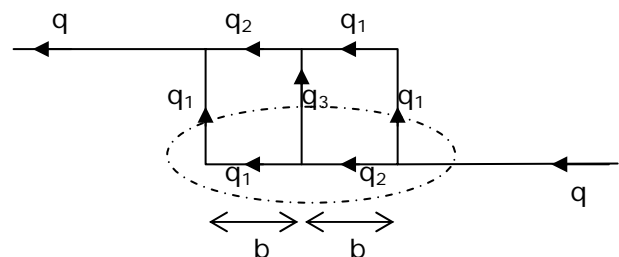
IV. 3 File:

Dall'equazione dei flussi sorgenti applicati sulla linea tratteggiata si ha:

$$q_3 + 2q_1 = q$$

dall'analogia idraulica applicata al primo nodo, si ottiene:

$$q_2 + q_1 = q$$



A questa dobbiamo aggiungere la condizione di congruenza.
L'energia di deformazione sarà data dalla seguente espressione:

$$V_d = V_{d,pannelli}(q) + \frac{1}{2} \left(\frac{2q_1^2 b}{Gt} + \frac{2q_2^2 b}{Gt} \right) + \frac{1}{2} \frac{P}{k} (2q_1^2 + q_3^2)$$

$$V_d = V_{d,p}(q) + \frac{1}{2} \frac{b}{Gt} (2q_1^2 + 2(q - q_1)^2 + \alpha(2q_1^2 + (q - 2q_1)^2))$$

ricordando che $\alpha = \frac{PGt}{kb} = \frac{Gt/b}{k/P} = \frac{k_p}{k_c}$, è il rapporto tra la rigidezza del pannello k_p e quella del chiodo k_c ,

$$\frac{\partial V_d}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow 4q_1 - 4(q - q_1) + 4\alpha q_1 - 4\alpha(q - 2q_1) = 0$$

$$(8 + 12\alpha)q_1 = (4 + 4\alpha)q$$

$$q_1 = \frac{1 + \alpha}{2 + 3\alpha} q \quad q_2 = \frac{1 + 2\alpha}{2 + 3\alpha} q \quad q_3 = \frac{\alpha}{2 + 3\alpha} q$$

⑧

$$\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2} q \quad q_2 = \frac{1}{2} q \quad q_3 = 0$$

$$(k_c \gg k_p)$$

la fila centrale di chiodi è scarica.

⑧

$$\alpha \rightarrow \infty \Rightarrow q_1 = \frac{1}{3} q \quad q_2 = \frac{2}{3} q \quad q_3 = \frac{1}{3} q$$

$$(k_p \gg k_c)$$

il flusso si distribuisce nelle giunzioni in modo uniforme¹⁰.

Solitamente si lavora con un α molto basso, quindi lavorano principalmente le file di chiodi esterne, quella centrale è quasi scarica. La configurazione con 3 file di chiodi, si usa per motivi di sicurezza; se dovesse cedere una giunzione le altre due sono in grado di garantire l'unione dei pannelli.

¹⁰ Nelle strutture aeronautiche il dimensionamento si fa con $k_c \gg k_p$, mentre nelle chiodature navali si usa $k_p \gg k_c$.

Incollaggi

Concludiamo il discorso sulle giunzioni parlando d'incollaggi.

Le resine termoplastiche al calore diventano prima pastose ed infine fluide e possono essere facilmente lavorate; una volta raffreddate tornano a possedere le stesse proprietà meccaniche di partenza.

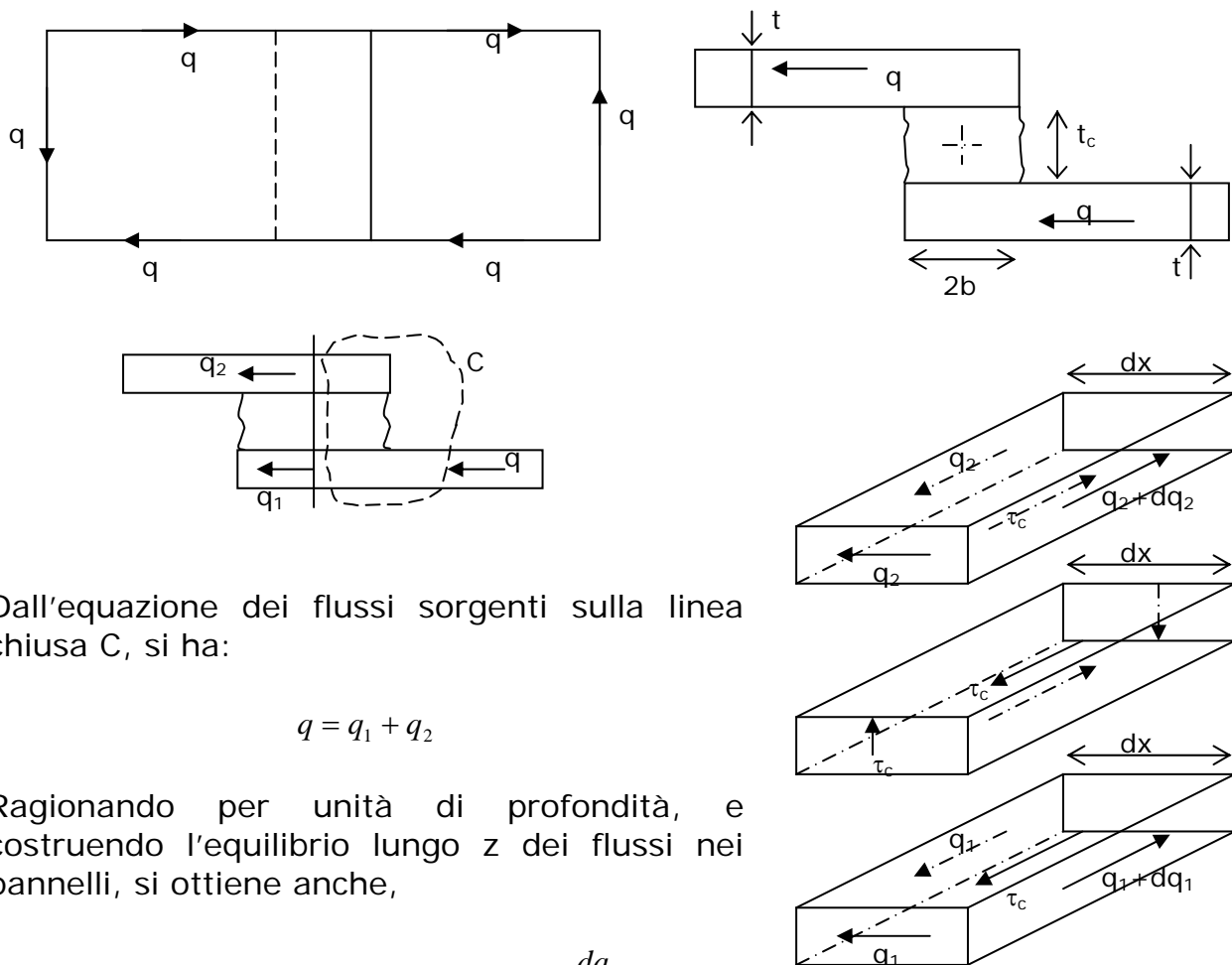
I materiali termoindurenti, invece, polimerizzano con l'ausilio di un catalizzatore a temperatura ambiente (come ad esempio le colle a due componenti).

In campo aeronautico si usano film di materiale leggermente prepolymerizzato, rinforzato spesso con fibre di vetro; si comprimono le due superfici, con interposto il film, e si scaldano in autoclave.

Lo spessore ottimale del film è di circa 1/20 mm per i metalli; quando si comprimono le due superfici sono le fibre contenute nel film a regolare lo spessore.

Si osservi che l'incollaggio sul legno è sostanzialmente diverso: in questo caso lo spessore della colla deve praticamente scomparire (il legno s'imbeve di colla).

Andiamo adesso a calcolare i flussi nelle giunzioni incollate:



Dall'equazione dei flussi sorgenti sulla linea chiusa C, si ha:

$$q = q_1 + q_2$$

Ragionando per unità di profondità, e costruendo l'equilibrio lungo z dei flussi nei pannelli, si ottiene anche,

$$q_1 + dq_1 - q_1 - \tau_c dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_c = \frac{dq_1}{dx}$$

$$q_2 + dq_2 - q_2 + \tau_c dx = 0 \Rightarrow \tau_c = \frac{dq_2}{dx}$$

Per risolvere il problema manca un'equazione; per scriverla, imponiamo la congruenza con il teorema di Menabrea:

$$V_d = V_d(q) + \int_{-b}^b \frac{1}{2} \frac{q_1}{t} \frac{q_1}{tG} t \cdot 1 \cdot dx + \int_{-b}^b \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{tG} dx + \int_{-b}^b \frac{1}{2} \frac{\tau_c^2 t_c}{G_{colla}} dx$$

$$V_d = V_d(q) + \frac{1}{2} \int_{-b}^b \left[\frac{1}{Gt} (q_1^2 + q_2^2) + \frac{t_c}{G_{colla}} \tau^2 \right] dx = V_d(q) + \frac{1}{2} \frac{1}{Gt} \int_{-b}^b \left(q_1^2 + q_2^2 + \frac{t_c Gt}{G_{colla}} \left(\frac{dq_1}{dx} \right)^2 \right) dx$$

chiamando $\frac{2}{\alpha^2} = \frac{t_c Gt}{G_{colla}}$ si ha,

$$V_d = V_d(q) + \frac{1}{2} \frac{1}{Gt} \int_{-b}^b \left[q_1^2 + (q - q_1)^2 + \frac{2}{\alpha^2} q_1'^2 \right] dx$$

bisogna andare a minimizzare il funzionale $F(q_2, q_1')$, si ottiene,

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} - \left(\frac{\partial F}{\partial q_1'} \right)' = 0 \Rightarrow 2q_1 - 2(q - q_1) - \frac{2}{\alpha^2} 2q_1'' = 0$$

$$\frac{q_1''}{\alpha^2} - q_1 = -\frac{q}{2} \quad (\#)$$

Dobbiamo risolvere l'equazione differenziale lineare del 2° ordine non omogenea. La soluzione particolare della (#) sarà $q_1 = \frac{q}{2}$.

La soluzione generale dell'equazione omogenea associata, invece, avrà una forma del tipo $q_1 = Ae^{\lambda x}$:

$$q_1' = \lambda Ae^{\lambda x} \quad q_1'' = \lambda^2 Ae^{\lambda x}$$

$$\frac{q_1''}{\alpha^2} - q_1 = 0 \Rightarrow \frac{\lambda^2 Ae^{\lambda x}}{\alpha^2} - Ae^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \alpha^2 \Rightarrow \lambda = \pm \alpha$$

la soluzione dell'equazione differenziale è dunque:

$$q_1 = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + \frac{q}{2}$$

Le costanti A e B vengono determinate tramite le condizioni al contorno,

$$\begin{cases} x = b & \Rightarrow & q_1 = q \\ x = -b & \Rightarrow & q_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ae^{\alpha b} + Be^{-\alpha b} + \frac{q}{2} = q \\ Ae^{-\alpha b} + Be^{\alpha b} + \frac{q}{2} = 0 \end{cases}$$

sommando membro a membro si ha,

$$A(e^{\alpha b} + e^{-\alpha b}) + B(e^{\alpha b} + e^{-\alpha b}) = 0 \Rightarrow A + B = 0$$

la soluzione diventa:

$$q_1 = A(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}) + \frac{q}{2} = 2A \sinh(\alpha x) + \frac{q}{2}$$

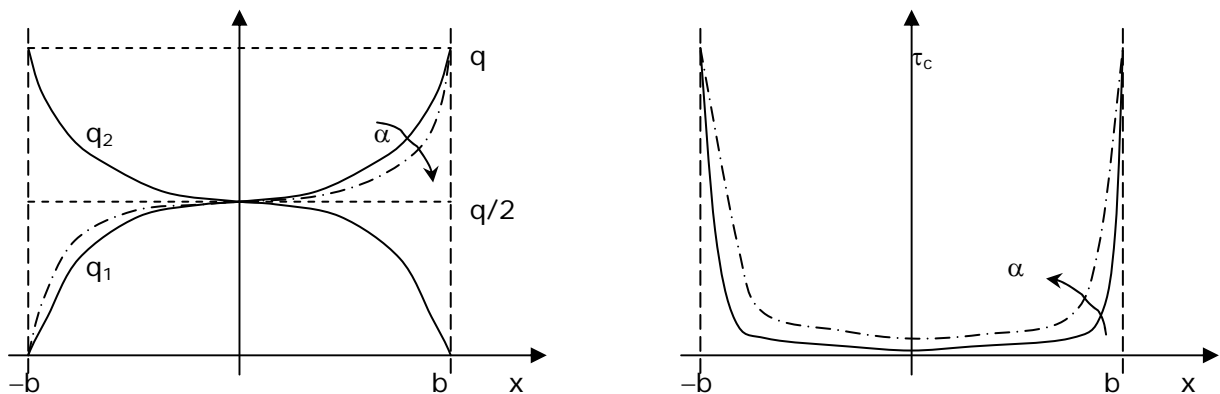
Per determinare A usiamo la seconda condizione la contorno, $x = -b \rightarrow q_1 = 0$:

$$0 = 2A \sinh(-\alpha b) + \frac{q}{2} \Rightarrow 2A = \frac{q}{\sinh(\alpha b)}$$

Infine, le soluzioni cercate sono,

$$q_1 = \frac{q}{2} \left(1 + \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha b)} \right) \quad q_2 = \frac{q}{2} \left(1 - \frac{\sinh(\alpha x)}{\sinh(\alpha b)} \right) \quad \tau_c = \frac{q \cosh(\alpha x)}{2 \sinh(\alpha b)}$$

Le funzioni che abbiamo ottenuto, sono funzioni di variabili x ed α . Questo ci porta a pensare di poter diagrammare le due funzioni in tali variabili,



Si può notare come la parte centrale è quasi scarica, infatti, se abbiamo una struttura con questi dati: $t = 1.2 \text{ mm}$, $t_c = 0.05 \text{ mm}$, $G = 26 \text{ GPa}$, $G_{colla} = 6 \text{ GPa}$, $b = 12 \text{ mm}$ si ottiene un valore di α di:

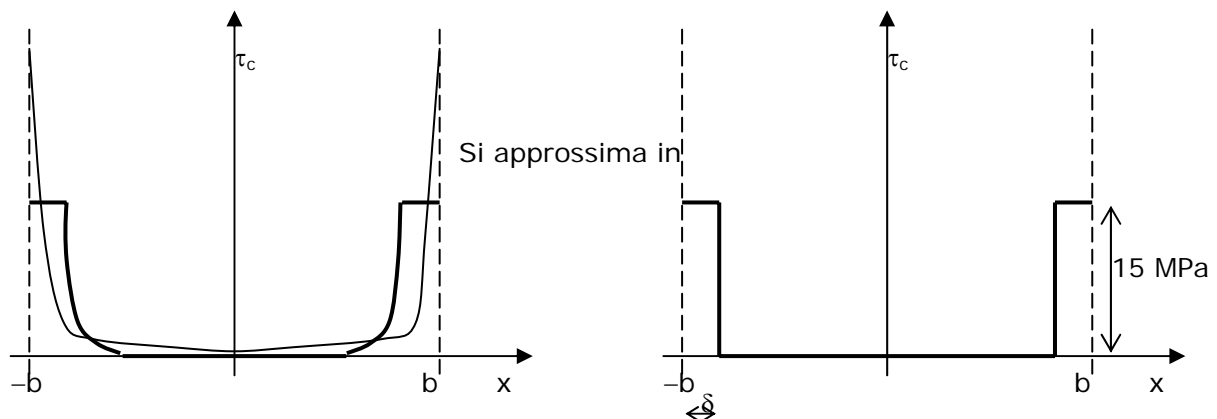
$$\alpha = \sqrt{\frac{2G_{colla}}{t_c G t}} = 2.67 \text{ mm}^{-1}$$

quindi il rapporto:

$$\frac{\tau_c(b)}{\tau_c(0)} = \frac{\cosh(\alpha b)}{\cosh(0)} = \cosh(\alpha b) = \cosh(32.071) = 4.24 \cdot 10^{13}$$

tutto il carico è ad un estremo.

Nella realtà, ad un certo punto si arriva allo snervamento della colla:



$$\bar{\tau}_c \cdot 2\delta = q \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{q}{2\bar{\tau}_c}$$

Poiché un pannello non può lavorare con una τ maggiore di circa metà del valore di snervamento, per ovvi motivi di instabilità, poniamo ad esempio $q=85 \text{ N/mm}$, da cui:

$$\delta = \frac{85}{30} = 2.83 \text{ mm}$$

ciò ci fa capire che la maggior parte dell'incollaggio è a sforzo nullo. La parte centrale regge l'incollaggio anche τ_c è quasi nullo, perché:

1. Al variare di α la curva cambia ma non l'integrale, perché questo ci dà il flusso che vogliamo trasmettere e che rimane sempre lo stesso.
2. Non possiamo superare il τ_{creep} , e quindi la curva si alza un po'.

Tale caratteristica degli incollaggi tra i metalli è indispensabile in quanto garantisce che non avvenga scorrimento viscoso dello strato di colla a seguito di applicazione di carico costante.

Di solito l'incollaggio, per lavorare bene, necessita un rapporto tra lunghezza utile e lunghezza scarica non superiore a 1/5÷1/6.

Negli incollaggi non si manifestano problemi di fatica; i veri problemi sono costituiti dall'invecchiamento della colla e dai difetti di fabbricazione (ad esempio, superfici non pulite correttamente prima dell'incollaggio).

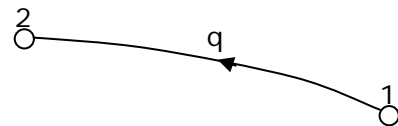
Metodi degli Spostamenti per le sezioni a semiguscio

Nei metodi agli spostamenti, contrariamente a quanto visto finora con il metodo delle forze, si assumono come incognite gli spostamenti; mentre il metodo delle forze è più adatto per svolgere calcoli manuali, un metodo agli spostamenti (come il metodo agli elementi finiti) si presta molto bene ad essere automatizzato, avendo il vantaggio di presentare un procedimento unico, indipendentemente dal grado di complessità (leggi di iperstaticità) della struttura; lo svantaggio è che si deve risolvere comunque un grande numero di equazioni, anche se la struttura è piuttosto semplice.

Presentiamo quindi una possibile soluzione per il calcolo dei flussi nelle travi a semiguscio col metodo degli spostamenti.

Per un pannello generico la differenza tra gli spostamenti di due estremi in direzione z è data dalla formula,

$$s_2 - s_1 = \frac{q_j l_j}{G t_j} - 2\Omega_j \dot{\theta}^{11} (*)$$

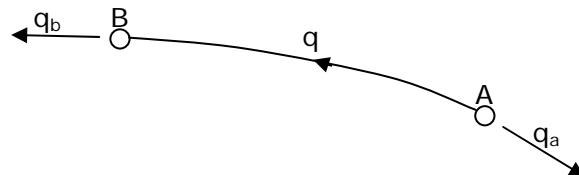


Consideriamo il flusso q positivo se va dal 1°

estremo al 2°, ed ancora, definiamo q_a e q_b se uscenti dal pannello:

$$q_a = -q$$

$$q_b = q$$



Sapendo che $\{F\}_j = [K]_j \{s\}_j$, per il pannello j -esimo la matrice $[K]$ si ottiene dalla formula (*).

Infatti, dato che,

$$q_j = \frac{t_j G}{l_j} \left[(s_b - s_a) + 2\Omega_j \dot{\theta} \right]$$

$$M_o = 2\Omega_j q_j = 2\Omega_j \frac{t_j G}{l_j} \left[(s_b - s_a) + 2\Omega_j \dot{\theta} \right]$$

e definendo,

$$\begin{array}{ccc} \text{Forze nodali} & \{f\}_j = \begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \\ M_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q \\ q \\ 2\Omega_j q \end{Bmatrix} & \{u\}_j = \begin{Bmatrix} s_a \\ s_b \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \\ \text{pannello } j\text{-esimo} & \swarrow \quad \searrow & \swarrow \quad \searrow \\ & \text{Momento del} & \text{Spostamento nodale} \\ & \text{pannello } j\text{-esimo} & \text{pannello } j\text{-esimo} \\ & \text{rispetto al polo O} & \end{array}$$

si ha,

$$\begin{Bmatrix} q_a \\ q_b \\ M_o \end{Bmatrix} = \frac{Gt_j}{l_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2\Omega \\ -1 & 1 & 2\Omega \\ -2\Omega & 2\Omega & 4\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_a \\ s_b \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

con

$$[K]_j = \frac{Gt_j}{l_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2\Omega \\ -1 & 1 & 2\Omega \\ -2\Omega & 2\Omega & 4\Omega^2 \end{bmatrix}$$

Per poter operare nel contesto dell'intera sezione (e quindi di tutti i nodi) bisogna dilatare i vettori delle forze nodali (nascono così molti 0) e degli spostamenti nodali; per questa operazione si può ricorrere ad esempio, alla matrice $[\beta]$ d'incidenza dei pannelli sui nodi:

dilatata \nearrow

$$\{\tilde{f}\}_j = [\tilde{K}]_j \{\tilde{u}\}_j$$

$$\sum_{j=1}^m \{\tilde{f}\}_j = \left(\sum_{j=1}^m [\tilde{K}]_j \right) \{u\} \Rightarrow [K] = \sum_{j=1}^m [\tilde{K}]$$

si osservi che:

$$\sum_{j=1}^m \{\tilde{f}\}_j = \begin{Bmatrix} T_y \frac{S_{x1}}{J_x} + T_x \frac{S_{y1}}{J_y} \\ T_y \frac{S_{x2}}{J_x} + T_x \frac{S_{y2}}{J_y} \\ \dots \\ \dots \\ M_z \end{Bmatrix} = \{P\}$$

L'equazione dei flussi sorgenti è scritta col segno invertito, perché i flussi sono entranti nei nodi

Somma di flussi entranti nel nodo i-esimo

Può essere facilmente calcolato

il sistema risolutivo è:

$$[K]\{u\} = \{P\}$$

trovate le u si possono ricavare i flussi q dall'equazione (*).

Rimane ancora da osservare che $[K]$ è singolare, perché le equazioni indipendenti per i flussi sorgenti sono solamente $n-1$, alle quali va aggiunta l'equazione per il momento. Per rimuovere la singolarità, si pone arbitrariamente un vincolo in un nodo (si rimuove, cioè, una riga ed una colonna di $[K]$).

Il vantaggio, torniamo a ripeterlo, è che tale metodo non risente del grado di iperstaticità della sezione.

Instabilità

La formula che ci consente di calcolare il carico critico di un'asta in compressione, è stata ricavata nell'ipotesi d'asta rettilinea e carico applicato sull'asse dell'asta stessa.

Se non siamo in queste condizioni, l'instabilità nasce per carichi più bassi di quelli trovati dalla formula. Questa è detta imperfezione di forma.

È importante poter valutare bene il carico critico, le imperfezioni di forma e le loro conseguenze sul carico critico.

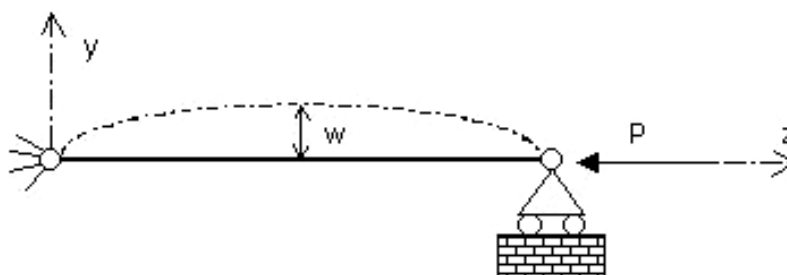
Le imperfezioni di forma sono legate ai processi tecnologici e non possono essere eliminate.

Infatti, se consideriamo un cilindro in composito realizzato con l'avvolgimento del filo sul mandrino, abbiamo un'inevitabile sovrapposizione del filo il cui spessore dà proprio l'imperfezione di forma che determina il crollo del carico critico.

Trave caricata di punta

Le ipotesi sulla struttura della trave sono: a) materiale omogeneo; b) sezione costante.

Andiamo a cercare una condizione d'equilibrio per la trave in configurazione deformata. Dato che la struttura si deforma non vale più l'ipotesi di spostamenti infinitesimi.



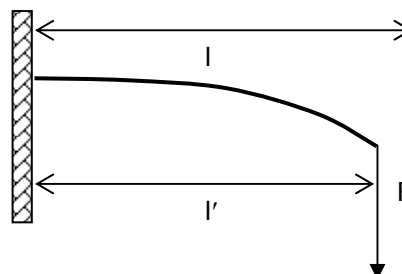
Configurazione indeformata

$$M = Fl$$



Configurazione deformata

$$M = Fl'$$



Non possiamo più usare metodi risolutivi validi per spostamenti infinitesimi quali il PLVC e il teorema di Menabrea.

Ma possiamo usare il PLV che vale anche per spostamenti non infinitesimi (per spostamenti infinitesimi non vediamo la differenza tra il PLV e il PLVC).

$$\delta l_e = \delta L_d$$

Per scrivere il lavoro di deformazione usiamo il metodo degli spostamenti:

$$\delta L_d = \int_0^l (EJw'' \delta w'' + \varepsilon EA \delta \varepsilon) dz$$

dove w è lo spostamento dell'asse baricentrico in direzione y .
Il lavoro esterno sarà dato da,

$$\delta l_e = -P \delta u(l)$$

Per calcolare il δu , non possiamo usare l'espressione del tensore di deformazione $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i/j} + s_{j/i})$, perché quest'ultimo vale solo per spostamenti infinitesimi, quindi dobbiamo considerare questa volta anche i termini quadratici,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(s_{i/j} + s_{j/i} + s_{k/i}s_{k/j})$$

nel nostro caso piano si ha, $s_x=0$, $s_y=w$ e $s_z=u$:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2}(s_{z/z} + s_{z/z} + s_{x/z}s_{x/z} + s_{y/z}s_{y/z} + s_{z/z}s_{z/z}) = \frac{1}{2}(2u' + w'^2 + u'^2)$$

se supponiamo che gli spostamenti lungo z siano piccoli, il termine u'^2 è trascurabile perché infinitesimo di ordine superiore, e si ha

$$\varepsilon = u' + \frac{1}{2}w'^2 \Rightarrow u' = \varepsilon - \frac{1}{2}w'^2 \Rightarrow u(l) = \int_0^l u' dz = \int_0^l \left(\varepsilon - \frac{1}{2}w'^2 \right) dz$$

$$\delta L_e = -P \delta u(l) = -\int_0^l P(\delta \varepsilon - w' \delta w') dz$$

Dall'uguaglianza dei due lavori si ottiene,

$$\int_0^l (EJw'' \delta w'' + \varepsilon EA \delta \varepsilon + P \delta \varepsilon - Pw' \delta w') dz = 0$$

$$\int_0^l (EJw'' \delta w'' + (\varepsilon EA + P) \delta \varepsilon - Pw' \delta w') dz = 0$$

Le grandezze $\delta w'$, $\delta w''$ e $\delta \varepsilon$ sono virtuali e quindi arbitrarie. Questo ci consente di sceglierle come meglio crediamo:

1.

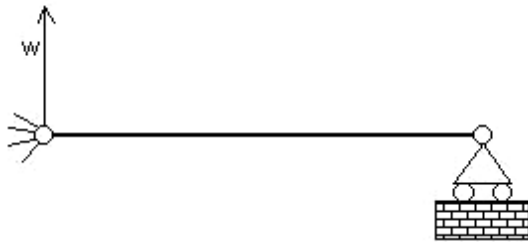
$$\delta w'' = 0, \delta w' = 0, \delta \varepsilon \neq 0 \Rightarrow \varepsilon EA = -P \Rightarrow T_z = -P$$

2.

$$\delta w'' \neq 0, \delta w' \neq 0, \delta \varepsilon = 0 \Rightarrow \int_0^l (EJ w'' \delta w'' - P w' \delta w') dz = 0$$

Per risolvere il PLV usiamo il metodo di Ritz, cioè andiamo a scrivere l'incognita w come una serie di funzioni, la serie deve essere congruente e convergente.

La congruenza agli estremi ci dice che:



$$w(0) = 0 \quad w(l) = 0$$

$$w'(0) = 0 \quad w''(l) = 0$$

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin\left(\frac{k\pi}{l} z\right)$$

q_k = ampiezza della sinusoide

$$w' = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \frac{k\pi}{l} \cos\left(\frac{k\pi}{l} z\right)$$

$$w'' = -\sum_{k=1}^{\infty} q_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi}{l} z\right) \quad \delta w'' = -\sum_{k=1}^{\infty} \delta q_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi}{l} z\right)$$

Adesso le incognite sono le q_k , e non abbiamo più le derivate.

L'integrale della seconda scelta fatta, diventa,

$$\int_0^l \left[EJ \sum_{k=1}^{\infty} q_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{k\pi}{l} z\right) \sum_{j=1}^{\infty} \delta q_j \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{j\pi}{l} z\right) - P \sum_{k=1}^{\infty} q_k \frac{k\pi}{l} \cos\left(\frac{k\pi}{l} z\right) \sum_{j=1}^{\infty} \delta q_j \frac{j\pi}{l} \cos\left(\frac{j\pi}{l} z\right) \right] dz = 0$$

essendo il prodotto di seni e coseni, una funzione ortogonale, il cui integrale da valore non nullo solo se l'argomento ha la stessa molteplicità, cioè

$$\int_0^l \sin\left(\frac{k\pi}{l} z\right) \sin\left(\frac{j\pi}{l} z\right) dz = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \frac{l}{2} & j = k \end{cases}$$

l'integrale diventa,

$$EJ \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{\infty} q_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \delta q_k - P \frac{l}{2} \sum_{k=1}^{\infty} q_k \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \delta q_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k \left[EJ \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 - P \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] \delta q_k = 0$$

$$q_k \left[EJ \left(\frac{k\pi}{l} \right)^4 - P \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \right] = 0$$

L'equazione ottenuta, deriva dal PLV, quindi contiene infiniti termini, cioè queste sono infinite equazioni.

Una soluzione banale è la $q_k=0$ per ogni P . Ciò significa che se le sinusoidi hanno ampiezza nulla la configurazione è indeformata con $T_z=-P$.

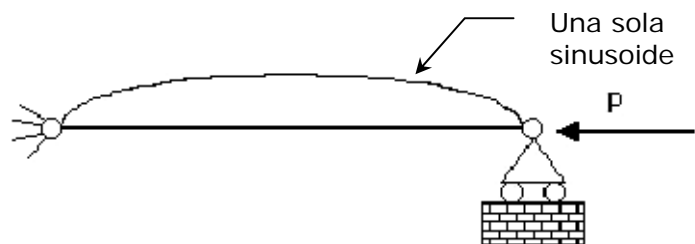
L'altra soluzione è $q_k \neq 0$, che ci dà

$$P = EJ \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2$$

la configurazione è deformata e il carico dipende da k .

Per $k=1$, si ha

$$P_{\min} = \frac{EJ\pi^2}{l^2}$$



Se cambiamo i vincoli la formula diventa,

$$P = \frac{EJ\pi^2}{\lambda^2}$$

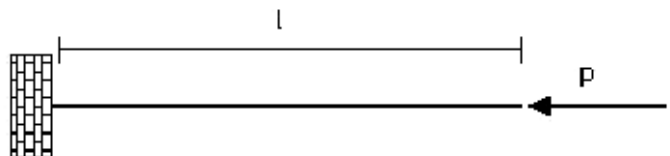
dove λ varia con le condizioni al contorno. La scelta della serie dipende dai vincoli, poiché deve rispettare la congruenza agli estremi.

In questo caso, per esempio, abbiamo un'asta incastrata per un estremo. Le condizioni al contorno saranno:

$$w(0) = 0$$

$$w'(0) = 0$$

$$w''(0) = 0$$

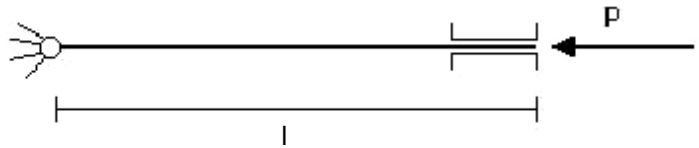


e la serie scelta sarà:

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \left[1 - \cos \left(\frac{k\pi}{l} z \right) \right] \quad \text{con } \lambda = 2l \quad (???)$$

Ancora possiamo vedere quest'ulteriore caso, in cui il carico critico sarà dato dalla formula:

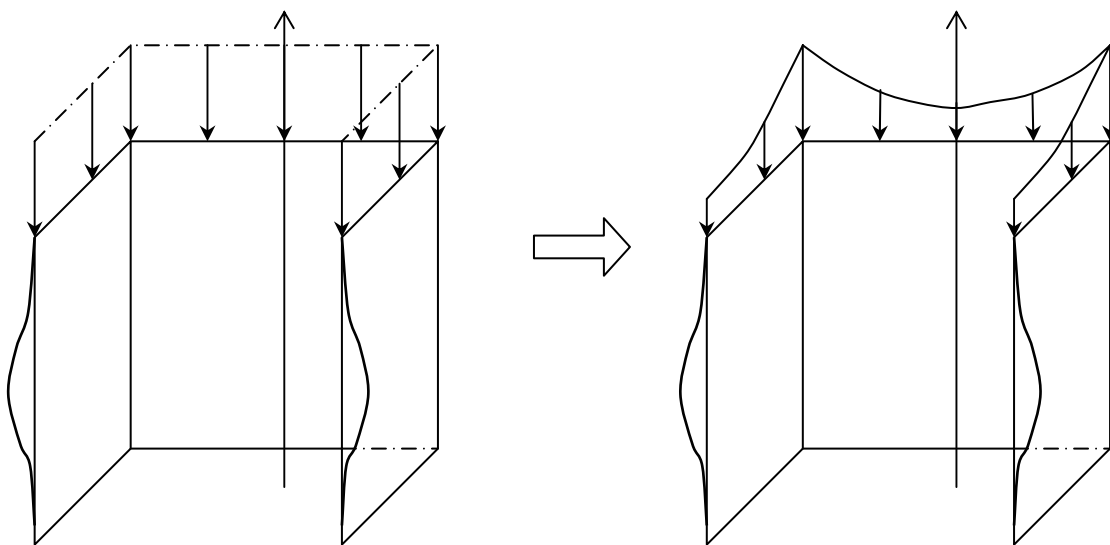
$$P = \frac{4EJ\pi^2}{l^2} \quad \text{con } \lambda = \frac{l}{2}$$



Infine ricordiamo che avendo il

$P_{cr} = \frac{EJ\pi^2}{l^2}$, possiamo ricavare la $\sigma_{cr} = \frac{EJ\pi^2}{l^2 A}$, e che questa non può superare la σ di snervamento.

Nelle travi molto corte possono nascere delle instabilità locali e non globali. Consideriamo una sezione a C, caricata in compressione. Si formano degli ingobbamenti nelle zone interne ma la trave resta in equilibrio. Quello che succede è la modifica del diagramma del carico.

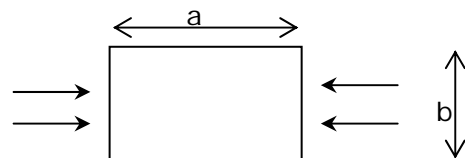


Si ha il collasso degli angoli, che sono le zone più sollecitate. Quest'instabilità ha come dimensioni caratteristiche quelle della sezione.

Anche i pannelli hanno problemi d'instabilità globale perché usiamo la linea media del pannello invece della fibra baricentrica.

Se b è la lunghezza del lato corto del pannello, k_{cr} è una costante tabulata che cambia al variare dei vincoli, possiamo dire che un pannello sottoposto a compressione ha una σ_{cr} di,

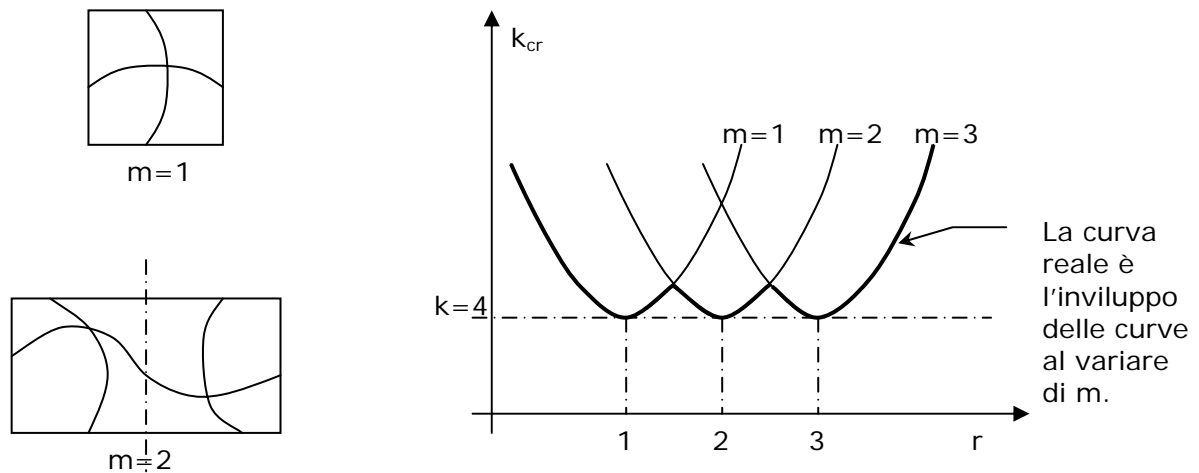
$$\sigma_{cr} = k_{cr} \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2$$



Il pannello ha i bordi appoggiati, cioè non possono spostarsi dal piano su cui giace, ma possono ruotare sul piano stesso.

$$k_{cr} = \left(\frac{m}{r} + \frac{r}{m} \right)^2 \quad \text{dove } r = \frac{a}{b}$$

m , invece, è il numero di semionde sul lato lungo del pannello.



L'instabilità dell'aereo è dovuta all'azione di taglio e compressione sui pannelli. Il fenomeno si chiama torsione diagonale, e può presentarsi anche quando agisce il solo taglio.

Consideriamo un pannello sottoposto a puro taglio. Se estraiamo un elemento infinitesimo, anche questo è soggetto a puro taglio, però se lo ruotiamo di 45° , lo sforzo diventa una trazione o una compressione a seconda dell'inclinazione delle fibre.

La trazione non crea nessun problema, la compressione, invece, può produrre l'instabilità del pannello a 45° .

In direzione ortogonale alle fibre si formano delle piccole pieghe sul pannello, che sono ammesse perché non compromettono la struttura.

Tema d'esame del 15-04-1998

Per un velivolo di peso P , apertura b , peso delle ali p , determinare con un metodo approssimato la frequenza e il modo della prima oscillazione flessionale simmetrica, ritenendo l'ala a sezione costante con momento d'inerzia J e modulo E .

Si consideri poi l'influenza sulla frequenza dell'introduzione di due serbatoi alari di estremità.

Dati:

$$b = 12 \text{ m}$$

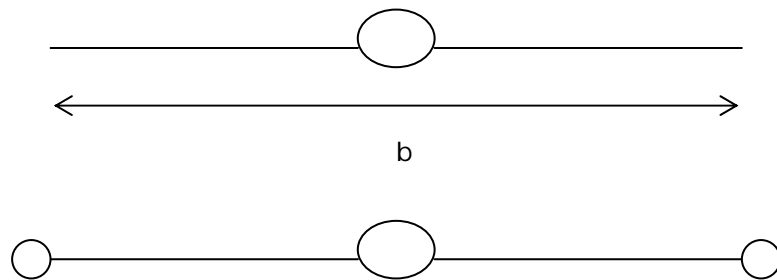
$$P = 4000 \text{ kg}_f$$

$$p_{ali} = \frac{1}{10} P$$

$$J = 9.6 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

$$E = 7300 \text{ kg/mm}^2$$

$$m = 200 \text{ kg}$$

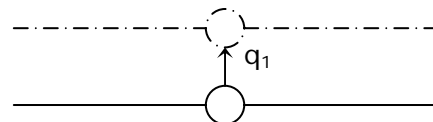


Svolgimento:

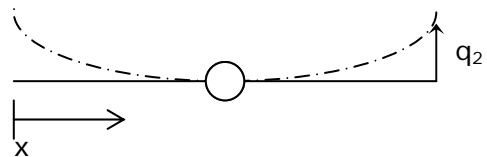
Andiamo a considerare spostamenti simmetrici, ed usiamo il metodo di Ritz, la serie deve essere congruente e convergente¹².

Il campo di spostamenti simmetrici più semplice è la traslazione:

$$w = q_1 = \text{cost}$$



$$w = q_2 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{b} x\right) \right)$$



Il metodo di Ritz deve esprimere insieme la traslazione rigida e lo spostamento sinusoidale di periodo $2b$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/b} = 2b$, quindi si ha,

$$w = q_1 + q_2 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{b} x\right) \right)$$

¹² Nella pratica usiamo solo un numero finito di termini, per esempio solo tre. Il 1° modo è quello con periodo pari alla lunghezza dell'ala.

definiamo:

$$M = \frac{4000 \text{ kg}_f}{9810 \text{ mm/s}^2} = 0.4077 \text{ kg}$$

Massa fusoliera

$$p = \frac{400 \text{ kg}_f}{9810 \text{ mm/s}^2} = 0.04077 \text{ kg}$$

Massa ali

Costruiamoci il lavoro di deformazione flessionale attraverso il PLV:

$$\delta L_d = \int_0^b (EJ w'' \delta w'') dx$$

$$w' = \frac{\partial w}{\partial x} \quad w' = -q_2 \frac{\pi}{b} \cos\left(\frac{\pi}{b} x\right) \quad w'' = q_2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{b} x\right) \Rightarrow \delta w'' = \delta q_2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{b} x\right)$$

il lavoro di deformazione diventa:

$$\delta L_d = \int_0^b \left[EJ q_2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{b} x\right) \delta q_2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{b} x\right) \right] dx$$

sapendo che il prodotto dell'integrale dei due seni, ci dà come valore $b/2$, si ottiene,

$$\delta L_d = EJ \frac{\pi^4}{b^4} q_2 \delta q_2 \frac{b}{2} = \frac{EJ \pi^4}{2b^3} {}^{13}$$

$$\delta L_d = \{\delta q\}^T [K] \{q\} = \begin{Bmatrix} \delta q_1 & \delta q_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{EJ \pi^4}{2b^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow [K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{EJ \pi^4}{2b^3} \end{bmatrix}$$

Calcoliamo ora il lavoro delle forze d'inerzia,

$$\delta L_i = M \ddot{w}\left(\frac{b}{2}\right) \delta w\left(\frac{b}{2}\right) + \int_0^b \rho \ddot{w} \delta w dx$$

Contributo concentrato della fusoliera Contributo distribuito dell'ala

¹³ Se vogliamo descrivere il modo corrispondente ad una certa frequenza, dobbiamo rappresentare tutte le frequenze dal valore zero al valore che ci interessa.

Il realtà non conosciamo l'effettiva funzione w , allora, usiamo delle funzione semplici per rappresentarla, ma che siano anche plausibili, otteniamo un risultato che non è il vero comportamento della struttura anche se approssima la realtà.

Infatti, in caso di carico costante su un'asta incastrata, lo spostamento è di tipo parabolico, che non può essere mai rappresentato da una serie di sinusoidi.

$$\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \ddot{w} = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{b}x\right) \right) \quad \ddot{w}\left(\frac{b}{2}\right) = \ddot{q}_1 \quad \delta w\left(\frac{b}{2}\right) = \delta q_1$$

il lavoro d'inerzia diventa:

$$\begin{aligned} \delta L_i &= M \ddot{q}_1 \delta q_1 + \int_0^b \rho \left[\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{b}x\right) \right) \right] \left[\delta q_1 + \delta q_2 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{b}x\right) \right) \right] dx \\ \delta L_i &= M \ddot{q}_1 \delta q_1 + \int_0^b \rho \left[\ddot{q}_1 \delta q_1 + \ddot{q}_1 \delta q_2 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{b}x\right) \right) + \ddot{q}_2 \delta q_1 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{b}x\right) \right) + \ddot{q}_2 \delta q_2 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{b}x\right) \right)^2 \right] dx \\ \delta L_i &= M \ddot{q}_1 \delta q_1 + \rho \ddot{q}_1 \delta q_1 b + \rho \ddot{q}_1 \delta q_2 b \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) + \rho \ddot{q}_2 \delta q_1 b \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) + \rho \ddot{q}_2 \delta q_2 b \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \end{aligned}$$

sapendo che $\rho = p/b$, è la densità dell'ala per unità di apertura alare, si ha

$$\delta L_i = \{\delta q\}^T [M] \{\ddot{q}\}$$

$$\begin{aligned} [M]_{fusoliera} &= \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & [M]_{ala} &= \begin{bmatrix} p & p\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \\ p\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) & p\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right) \end{bmatrix} & \Rightarrow & [M] &= \begin{bmatrix} M + p & p\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \\ p\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) & p\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right) \end{bmatrix} \\ \text{Matrice della} & & \text{Matrice della} & & \text{Matrice totale} \\ \text{massa della} & & \text{massa dell'ala} & & \text{con tutte le} \\ \text{fusoliera} & & & & \text{masse} \end{aligned}$$

Infine, il sistema dinamico può essere scritto come:

$$[M] \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} M + p & p\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \\ p\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) & p\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{EJ\pi^4}{2b^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Adesso dobbiamo cercare la 1^a frequenza flessionale dell'ala, e per farlo sfruttiamo gli autovalori. Prendendo delle soluzioni del tipo,

$$\{q\} = \{x\} \cos \omega t \quad \{\dot{q}\} = -\{x\} \omega \sin \omega t \quad \{\ddot{q}\} = -\{x\} \omega^2 \cos \omega t$$

il sistema diventa,

$$-[M]\{x\}\omega^2 \cos \omega t + [K]\{x\} \cos \omega t = 0 \Rightarrow \det(-[M]\omega^2 + [K]) = 0$$

le matrici sono almeno semidefinite positive, $\det[K]=0$ perché la struttura non è vincolata. Troviamo una soluzione oscillatoria risolvendo l'equazione,

$$\omega^2 \left[(M+p) \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) p \omega^2 - \frac{EJ\pi}{2b^3} \right] - \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)^2 p^2 \omega^2 \right] = 0$$

Si ha una 1^a soluzione che ci dà $\omega^2=0$, cioè un moto rigido.
Ed una 2^a soluzione,

$$\omega^2 = \frac{EJ\pi^4}{2b^3} \frac{M+p}{(M+p) \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) p - \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)^2 p^2} = 2255.72 \text{ s}^{-2}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 7.55 \text{ Hz}$$

1^a frequenza
flessionale dell'ala.

Passiamo adesso a considerare l'influenza data alla struttura dei due serbatoi, messi alla fine delle due ali. Per mettere in gioco queste due nuove strutture basta considerare il lavoro d'inerzia δL_i di queste masse.

Se aggiungiamo pezzi deformabili dobbiamo considerare anche il δL_d di questi nuovi pezzi.

$$\delta L_{i,m} = m \ddot{w}(0) \delta w(0) + m \ddot{w}(b) \delta w(b)$$

$$\ddot{w}(0) = \ddot{w}(b) = \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \quad w(0) = w(b) = q_1 + q_2 \quad \Rightarrow \quad \delta w(0) = \delta w(b) = \delta q_1 + \delta q_2$$

il lavoro d'inerzia sarà,

$$\delta L_{i,m} = 2m \left(\ddot{q}_1 \delta q_1 + \ddot{q}_1 \delta q_2 + \ddot{q}_2 \delta q_1 + \ddot{q}_2 \delta q_2 \right) \Rightarrow [M_{\text{serbatoi}}] = \begin{bmatrix} 2m & 2m \\ 2m & 2m \end{bmatrix}$$

Matrice delle masse
dei serbatoi

la matrice totale, considerando i serbatoi diventa,

$$[M] = \begin{bmatrix} M + p + 2m & p \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) + 2m \\ p \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) + 2m & p \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) + 2m \end{bmatrix}$$

Rifacendo il nuovo sistema agli autovalori e risolvendo il $\det(-[M]\omega^2 + [K]) = 0$, si ha sempre una soluzione banale che ci dà $\omega = 0$, cioè il moto rigido, ed in più una seconda equazione che ci dà come valore finale,

$$\omega^2 = \frac{EJ\pi^4}{2b^3} \frac{M + p + 2m}{(M + p + 2m) \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) p + 2m \right] - \left[\left(1 - \frac{2}{\pi} \right) p + 2m \right]^2} = 452.33 \text{ s}^{-2}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 3.385 \text{ Hz}$$

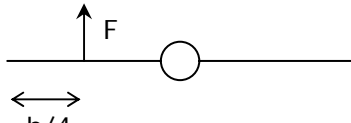
Con l'aggiunta dei serbatoi, la frequenza si è dimezzata.

Se siamo in presenza di un carico concentrato, l'equazione dell'equilibrio dinamico diventa,

$$[M] \left\{ \ddot{q} \right\} + [M] \{ \dot{q} \} = \{ P \}$$

Forze generalizzate che compiono lavoro per le coordinate libere del sistema, si ricavano dal lavoro delle forze esterne.

Esempio:



$$w = q_1 + q_2 \left(1 - \sin \left(\frac{\pi}{b} x \right) \right) \quad \delta L_F = F \delta w \left(\frac{b}{4} \right)$$

$$w \left(\frac{b}{4} \right) = q_1 + q_2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \delta L_F = F \left(\delta q_1 + \delta q_2 \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\delta L_F = \{ \delta q \}^T \{ P \} = \{ \delta q_1 \quad \delta q_2 \} \left\{ \begin{array}{c} F \\ \frac{2 - \sqrt{2}}{2} F \end{array} \right\}$$

Possiamo scrivere

$$\{ P \} = \{ P \}_0 + \{ P \}_1$$

dove $\{ P \}_0$ è costante nel tempo, e ci dà la soluzione statica; mentre $\{ P \}_1$ è variabile nel tempo e ci dà la soluzione dinamica.

$$\{ q \} = \{ q \}_0 + \{ q \}_1$$

Se abbiamo solo carichi statici $\{ P \}_0$ e non abbiamo carichi esterni,

$$[K] \{ q \} = \{ P \}_0$$

$$[M]\ddot{q} + [K]q = 0 \quad \{q\} = \{x\} \cos(\omega t + \phi)$$

$$(-[M]\omega^2 + [K])\{x\} \cos(\omega t) = 0 \Rightarrow \det([K] - [M]\omega^2) = 0 \Rightarrow \omega$$

gli autovettori $\{x\}$ sono disaccoppiati tra di loro, non si scambiano lavoro reciproco, $\{x\}$ sono i modi propri della struttura. ω^2 è maggiore di zero perché le matrici sono definite positive.

$$\begin{aligned} \omega_r \rightarrow \{x\}_r \quad [K]\{x\}_r &= [M]\{x\}_r \omega_r^2 && \text{premultiplico per } \{x\}_s^T \\ \omega_s \rightarrow \{x\}_s \quad [K]\{x\}_s &= [M]\{x\}_s \omega_s^2 && \text{premultiplico per } \{x\}_r^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{x\}_s^T [K]\{x\}_r &= \{x\}_s^T [M]\{x\}_r \omega_r^2 \\ \{x\}_r^T [K]\{x\}_s &= \{x\}_r^T [M]\{x\}_s \omega_s^2 \end{aligned} \Rightarrow \{x\}_s^T [M]\{x\}_r (\omega_r^2 - \omega_s^2) = 0$$

se $r=s$ $\{x\}_s^T [M]\{x\}_r$ assume qualsiasi valore;

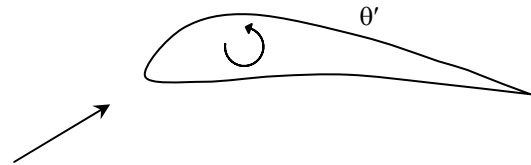
se $r \neq s$ $\{x\}_s^T [M]\{x\}_r = 0$ e $\{x\}_s^T [K]\{x\}_r = 0$, gli autovalori sono ortogonali, cioè i modo propri sono ortogonali quindi tra di loro indipendenti.

In aerodinamica le forzanti dipendono dalla θ' e dalla velocità,

$$[M]\ddot{q} + [\tilde{C}]\dot{q} + [\tilde{K}]q = 0$$

$$[\tilde{K}] = [K] - \mu[K]$$

$$\{P\} = \mu[K]_i \{q\} + \mu[C]_i \dot{q} \quad (*)$$

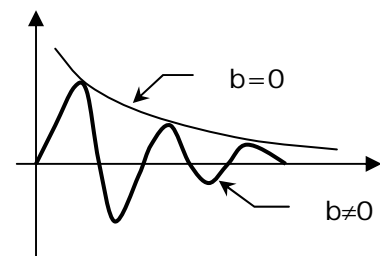


$[\tilde{K}]$ e $[\tilde{C}]$ non è detto che siano definite positive quindi non è detto che l'oscillazione sia stabile.

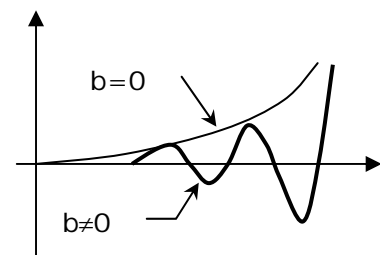
$$\{q\} = \{x\} e^{pt} \quad p = a + ib$$

La parte reale ci dice se il fenomeno è stabile o meno, la parte immaginaria ci dice invece, se il fenomeno è oscillatorio o meno.
La parte difficile consiste nel risolvere la (*).

$a_k < 0$ stabile



$a_k > 0$ instabile



Materiali Compositi

I compositi sono materiali composti da più fasi; accoppiano delle fibre di elevatissime prestazioni ma difficilmente maneggiabili con una matrice che conferisce una forma propria al materiale e trasferisce i carichi alle fibre, pur avendo caratteristiche meccaniche decisamente scadenti.

La limitazione più grande di questi materiali è dovuta proprio alla matrice, che in condizioni reali non è spesso in grado di trasferire i carichi in modo efficiente.

I compositi migliori hanno il 60% di fibre e il 40% di matrice. Abbiamo diverse disposizioni delle fibre su cui scegliere:

1. continue;
2. discontinue, i, stessa direzione;
 ii, a caso.

Se usiamo fibre discontinue siamo costretti a mettere maggiore quantità di matrice. Solitamente, la disposizione che si usa maggiormente è quella a fibre continue, ma le fibre discontinue disposte a caso hanno un costo basso, quindi vengono usate per lo stampaggio di pezzi complicati ma non di elevatissime prestazioni.

Se andiamo a sovrapporre più strati di fibre in modo da avere fibre con diversi orientamenti, le caratteristiche complessive del pezzo le troviamo sovrapponendo i risultati di ogni strato.

Possiamo andare a confrontare alcune caratteristiche di materiali metallici, ci si accorge che i rapporti

$\frac{E}{\rho} \cong 3, \frac{\sigma_R}{\rho}$, hanno lo stesso valore per

tutti i materiali, quindi se vogliamo imporre una certa rigidità la struttura ha sempre lo stesso peso.

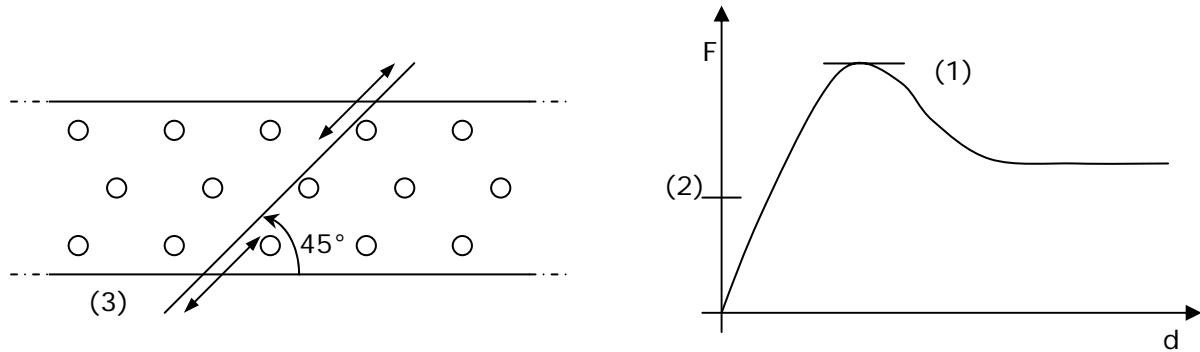
Se facessimo un aereo in acciaio il problema non sarebbe il peso, ma lo

spessore piccolissimo dei pannelli e quindi sorgerebbero dei problemi di instabilità, per questo usiamo l'alluminio e non l'acciaio.

	$E(kg/mm^2)$	$\rho(kg/dm^3)$
Acciaio	21.000	7.8
Alluminio	7.200	2.7
Carbonio	20.000	1.6

Le fibre, però sono estremamente interessanti dal punto di vista costruttivo: basti pensare che un filo di vetro (a differenza di una lastra di vetro) ha una σ di rottura pari a $300 kg/mm^2$, contro i $150\div 180$ dell'acciaio. La fibra, che ha evidentemente una direzione preferenziale e privilegiata, può essere realizzata praticamente esente da difetti dal punto di vista della struttura fine (data la modesta sezione) quindi questo fatto incrementa di molto lo sforzo di rottura.

Le giunzioni per i materiali compositi sono solitamente la polimerizzazione o l'incollaggio, infatti, creano problemi la chiodatura o l'imbullonatura perché rendono discontinue le fibre del composito. In questi casi bisogna fare dei fori molto più grandi e mettere un distributore di carico all'interno.

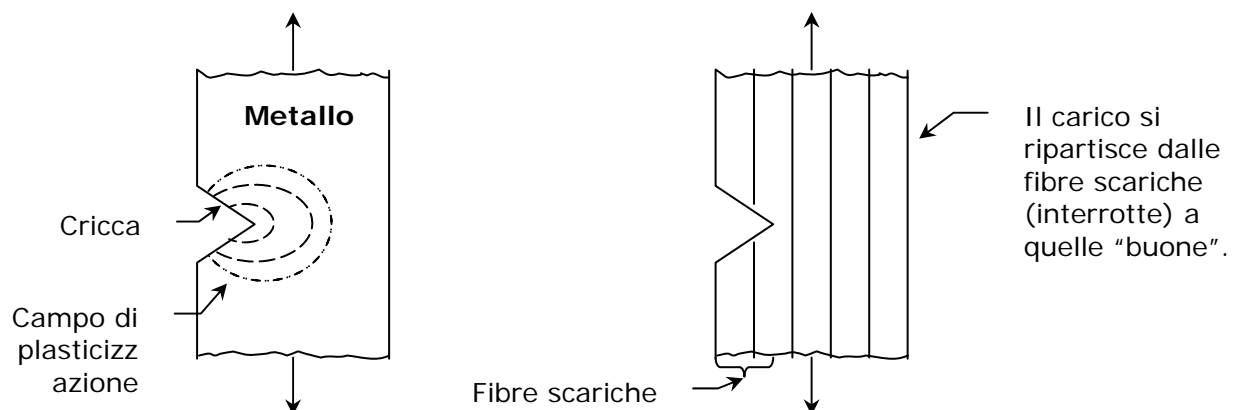


Nei normali materiali da costruzione la σ di rottura (che è una rottura per taglio (2), cioè, per scorrimento relativo di due piani atomici contigui(3)) è molto più bassa della σ "atomica" di separazione vera e propria, cioè, degli atomi (1). Le eventuali impurità del reticolo atomico, poi, abbassano ancora di più questa soglia. Per questi motivi le fibre hanno una σ di rottura molto prossima a quella ideale, atomica.

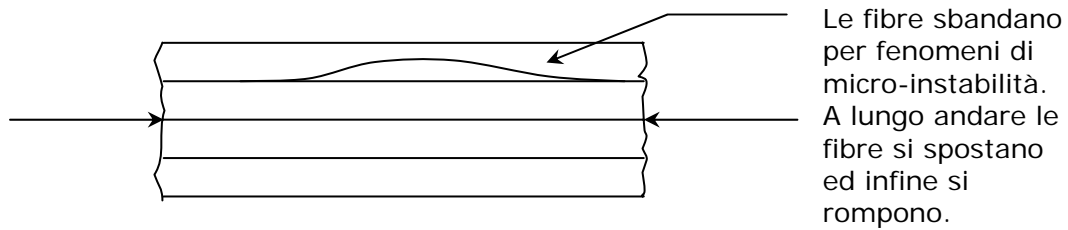
Tra le fibre più utilizzate si annoverano le fibre di vetro, di carbonio, di kevlar oppure fibre metalliche (titanio) accoppiate a matrici metalliche (alluminio).

	E	σ	ρ
Vetro	7.000	300	2.5
Carbonio	38.500	200	1.9
Kevlar			
C T800	80.000		
Resina	350		$\nu=0.34$

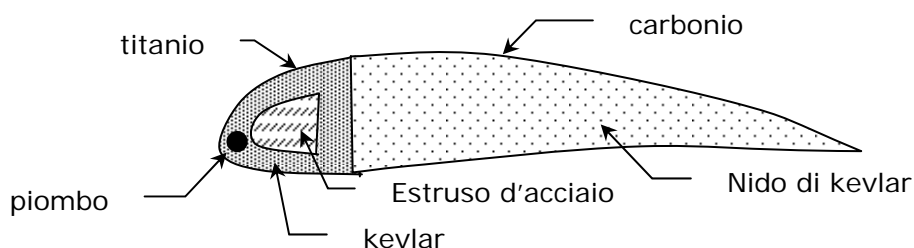
L'iniziale entusiasmo del mondo industriale verso i compositi era dettato anche da un'altra motivazione: si pensava, infatti, che questi ultimi fossero esenti da fenomeni di fatica:



In realtà anche il composito risente alla fatica ma non a trazione, bensì a compressione; il motivo è evidente:



Dove però sono presenti campi di sforzo predominanti a trazione (le pale degli



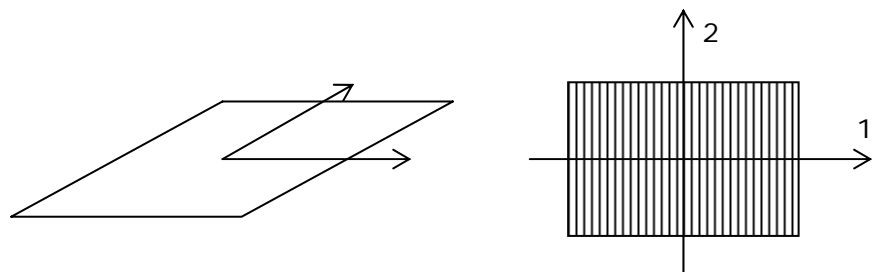
elicotteri), i materiali compositi risultano decisamente vincenti.

Le fibre possono essere orientate in maniera differente da strato a strato, una volta individuate le direzioni degli sforzi predominanti. Le fibre a $\pm 45^\circ$ sopportano bene la torsione; quelle a $0^\circ/90^\circ$ resistono bene alla flessione. Dal punto di vista costruttivo, prima le fibre vengono depositate a secco sopra delle stuoie, e poi si cola la resina uniformandola con degli appositi rulli. Per non rischiare però, di avere resina distribuita in modo eterogeneo, in certi casi si preferisce preimpregnare le stuoie di resina.

Per costruire solidi di rotazione è possibile inoltre ricorrere all'avvolgimento delle fibre.

Teoria della Laminazione

I compositi sono materiali ortotropi, ovvero esistono 3 piani, perpendicolari tra loro, dello spazio rispetto ai quali il materiale presenta le stesse caratteristiche. Ricordando che:



$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad , \quad \{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\}$$

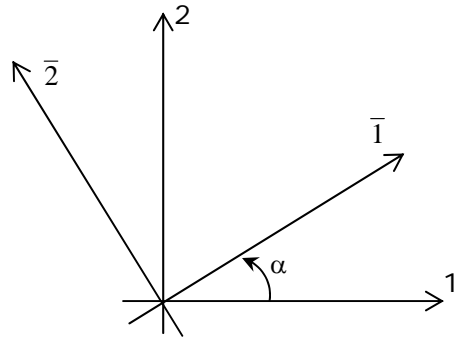
$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & \nu_{21}D_{22} & 0 \\ \nu_{12}D_{11} & \frac{E_{22}}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}$$

Le due matrici di rigidezza e flessibilità si intendono scritte nel sistema di riferimento dell'ortotropia (quello di simmetria del materiale).

$$m = \cos \alpha, \quad n = \sin \alpha$$

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [T]^{-1} \{\bar{\sigma}\}$$



La matrice di trasformazione inversa $[T]^{-1}$ coincide semplicemente con $[T]$ pur si sostituire α con $-\alpha$ (l'angolo viene ripercorso all'incontrario):

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}$$

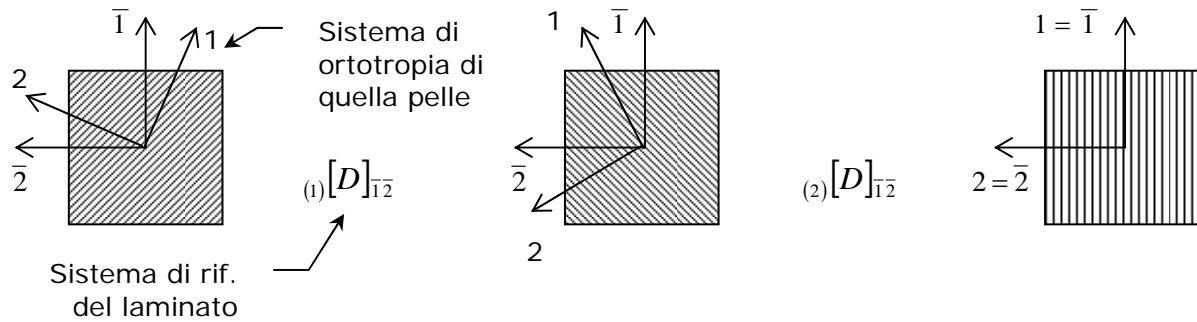
si ha poi: $\{\bar{\varepsilon}\} = [J]\{\varepsilon\}$ con $[J] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} = [T]^{-1^T}$,

inoltre: $\{\varepsilon\} = [J]^{-1}\{\bar{\varepsilon}\}$ con $[J]^{-1} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -mn \\ n^2 & m^2 & mn \\ 2mn & -2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} = [T]^T$.

Poiché il lavoro di deformazione è indipendente dal sistema di riferimento, essendo uno scalare, si ottiene:

$$\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} = \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} = \{\bar{\varepsilon}\}^T [J]^{-1^T} [D] [J]^{-1} \{\bar{\varepsilon}\} = \{\bar{\varepsilon}\}^T [T] [D] [T]^T \{\bar{\varepsilon}\} \Rightarrow [\bar{D}] = [T] [D] [T]^T$$

Supponiamo ora che il pannello sia dato da una composizione di pelli:



$$[D] \cdot h_{Tot} = \sum_{i=1}^3 {}^{(i)}[D]_{\bar{1}\bar{2}} \cdot h_i$$

$$[D] = \frac{1}{h_{Tot}} \sum_{i=1}^3 {}^{(i)}[D]_{\bar{1}\bar{2}} \cdot h_i$$

La rigidezza del pannello è la somma delle rigidezze dei singoli pannelli.

Metodo agli Elementi Finiti

È un metodo generale per la risoluzione di sistemi di equazioni differenziale alle derivate parziali con date condizioni al contorno; è nato, storicamente, per lo studio delle strutture aeronautiche.

È strettamente imparentato col metodo di Ritz, che serve per discretizzare le funzioni soluzioni del problema esprimendole come serie di funzioni note:

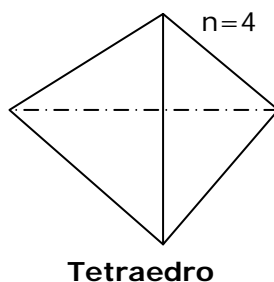
- Statica: $\underline{s}(x, y, z), s_x = \sum_{k=1}^N q_k f_k(x, y, z)$ (Ritz)
 Coefficienti incogniti \nearrow q_k \nwarrow Forze note f_k

- Dinamica: $\underline{s}(x, y, z, t), s_x = \sum_{k=1}^N q_k(t) f_k(x, y, z)$ (Kantorovich)

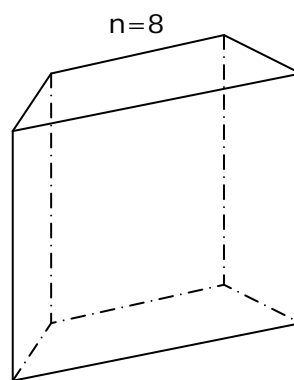
Ciascuna funzione della serie deve soddisfare le condizioni al contorno; la serie inoltre deve essere completa, nel senso che deve poter approssimare a piacere la soluzione (ad esempio, la serie di Fourier soddisfa questo requisito).

Il metodo agli elementi finiti consiste prima di tutto nella suddivisione del volume in un certo numero di elementi di forma semplice (il più semplice è il tetraedro). Tale procedura prende il nome, secondo le diverse consuetudini, di schema a elementi finiti / griglia / maillage / mesh.

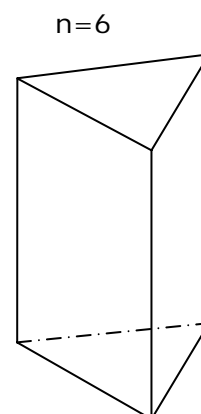
n → nodi



Tetraedro



Esaedro / Mattone / Brick



Prisma

Ciascun elemento è caratterizzato da un certo numero di nodi e di facce. Se si costruiscono elementi con più di due nodi per lato, si ottengono degli spigoli di forma curvilinea (con 3 nodi parabolica), e quindi si può approssimare una superficie curva a piacere.

Le incognite sono i valori degli spostamenti nei nodi; tutti gli altri spostamenti vengono calcolati per interpolazione:

$$s_x = \sum_{j=1}^n u_{j,x} N_{x,j}(x, y, z)$$

Funzioni interpolanti

In un elemento (n nodi)

Spostamenti di tutti i nodi

$$\begin{Bmatrix} s \\ s \\ s \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{Bmatrix} = [N(x, y, z)]_{3 \times 3n} \begin{Bmatrix} u \\ u \\ u \end{Bmatrix}_{3n \times 1}, \quad \begin{Bmatrix} u \\ u \\ u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \\ u_{2x} \\ \dots \\ \dots \\ u_{nz} \end{Bmatrix}$$

L'unica approssimazione è questa; tutto il resto viene ricavato in modo esatto; l'approssimazione dipende dalle funzione interpolanti e, ovviamente, dalle dimensioni degli elementi (come ovvio, il metodo deve migliorare diminuendo le dimensioni degli elementi, si aumenta cioè il numero di nodi e quindi il numero di incognite; il metodo deve quindi essere convergente).

Le funzioni N si chiamano funzioni di forma (shape functions).

Prima di vedere in dettaglio il metodo agli elementi finiti, vediamo come si imposta un generico metodo agli spostamenti:

$$\{s\} \Rightarrow \{\varepsilon\}: \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial s_x / \partial x \\ \partial s_y / \partial y \\ \partial s_z / \partial z \\ \partial s_x / \partial y + \partial s_y / \partial x \\ \partial s_y / \partial z + \partial s_z / \partial y \\ \partial s_z / \partial x + \partial s_x / \partial z \end{Bmatrix} = [D]\{s\}$$

dove $[D]$ è evidentemente la matrice di derivate simboliche:

$$[D] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}$$

ricordando che

$$\{\varepsilon\} = [D]\{s\} \quad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

Il lavoro di deformazione per il PLV si scrive come:

$$\delta L_d^* = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta s\}^T [D]^T [D] \{s\} dV$$

Nel caso specifico del metodo degli elementi finiti, considerando il generico elemento j-esimo:

$$\{s\}_j = [N]_j \{u\}_j \Rightarrow \{\varepsilon\}_j = [D] \{s\}_j = [D][N]_j \{u\}_j$$

poniamo, $[D][N]_j = [B]_j$, si ottiene,

$$\{\varepsilon\}_j = [B]_j \{u\}_j \Rightarrow \delta L_{d,j}^* = \int_{V_j} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \{\delta u\}_j^T \left(\int_{V_j} [B]_j^T [D][B]_j dV \right) \{u\}_j$$

poniamo ancora, $\int_{V_j} [B]_j^T [D][B]_j dV = [K]_j$, che è una matrice simmetrica, si ha

Matrice di rigidezza
dell'elemento j-esimo.

$$\delta L_{d,j}^* = \{\delta u\}_j^T [K]_j \{u\}_j$$

Forze generalizzate

Supponendo di introdurre la densità di forze di volume $\{F\}_j$, possiamo andare a calcolare il lavoro virtuale delle forze esterne sull'elemento j-esimo:

$$\delta L_{e,j}^* = \int_{V_j} \{\delta s\}_j^T \{F\}_j dV = \{\delta u\}_j^T \int_{V_j} [N]_j^T \{F\}_j dV$$

e ponendo, $\int_{V_j} [N]_j^T \{F\}_j dV = \{P\}_j$, si ha,

$$\delta L_{e,j}^* = \{\delta u\}_j^T \{P\}_j$$

Costituirebbe un grave errore, a questo punto, uguagliare i due lavori, in quanto si trascurerebbero tutti gli scambi energetici con gli elementi vicini.

Assemblando in maniera opportuna gli spostamenti, con il solito metodo di dilatazione, si ha:

$$\{\tilde{\delta u}\}^T [\tilde{K}]_j \{\tilde{u}\} \quad , \quad \{\tilde{\delta u}\}^T \{\tilde{P}\}_j$$

se M è il numero degli elementi,

$$\delta L_d^* = \sum_{j=1}^M \{\delta \tilde{u}\}^T [\tilde{K}]_j \{\tilde{u}\} = \{\delta \tilde{u}\}^T \left(\sum_{j=1}^M [\tilde{K}]_j \right) \{\tilde{u}\} \quad , \quad \sum_{j=1}^M [\tilde{K}]_j = [K]$$

$$\delta L_e^* = \{\delta \tilde{u}\}^T \sum_{j=1}^M \{\tilde{P}\}_j \quad , \quad \sum_{j=1}^M \{\tilde{P}\}_j = \{P\}$$

uguagliando adesso, si ottiene,

$$\delta L_e^* = \delta L_d^* \Rightarrow \{\delta u\}^T ([K]\{u\} - \{P\}) = 0$$

Dovendo quest'equazione scalare valere per ogni scelta di $\{\delta u\}$, si ottengono tante equazioni quante occorrono per risolvere il problema,

$$[K]\{u\} = \{P\}$$

Tutto questo viene effettuato automaticamente dal programma, dopo aver assegnato geometria, vincoli e materiale.

Si osserva che $[K]$ è una matrice molto sparsa (ci sono tantissimi zeri); esistono allora delle tecniche numeriche che consentono di risolvere il sistema senza invertire la matrice.

Il sistema così scritto non è ancora risolubile poiché la matrice $[K]$ è singolare (non si è tenuto conto dei vincoli esterni e quindi la matrice contiene 6 labilità nei confronti dei moti rigidi).

Se una struttura ha effettivamente dei vincoli esterni (ad esempio un ponte o un grattacielo), questi vengono imposti senza particolari problemi; ma se si sta considerando un aeroplano in volo, non essendoci alcun vincolo esterno, bisogna mettere dei vincoli fittizi (il procedimento funziona solo nel problema statico); tali vincoli non devono alterare il problema ovvero i vincoli devono dare reazioni singolarmente nulle; per tale motivo il sistema di vincoli deve essere isostatico: in tal modo, se il sistema di carico è a risultante e momento risultante nulli (come si verifica con un aeroplano in volo, essendo in equilibrio), tutte le reazioni vincolari sono nulle.

$$\begin{array}{ccc} [K] & & \\ & \Rightarrow & \text{Vincoli} \\ \{P\} & & \left\{ \begin{array}{l} \text{Reali} \\ \text{Fittizi} \end{array} \right. \end{array}$$


Possono ancora insorgere grossi problemi dovuti ad errori numerici (i metodi risolutivi, spesso basati sul MEG, accumulano errori su errori ad ogni sostituzione successiva, dovuti al troncamento). Se il sistema ha però una

matrice ben condizionata (ad esempio, i numeri sulla diagonale sono più "forti" di quelli esterni), gli errori rimangono entro livelli accettabili.

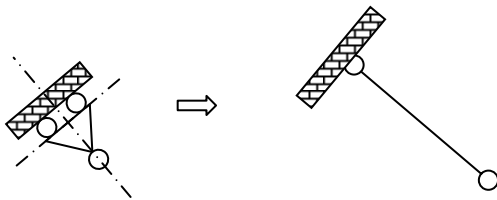
I vincoli più semplici sono quelli relativi ad una componente di spostamento

(esempio,  ; nella terminologia Nastran, i *single-point constraint* (SPC)) o

più componenti di spostamento (*multi-point constraint* (MPC); ad

esempio, ).

Un metodo per porre un vincolo di questo tipo, che non sia la scontata eliminazione delle righe e delle colonne di $[K]$ (operazione ardua se la matrice $[K]$ inizia ad essere dell'ordine di $1.000.000 \times 1.000.000$) è, ad esempio:



Si pone una biella molto rigida rispetto alla struttura (in questo caso la scelta critica riguarda la rigidezza della biella).

Il problema viene quindi risolto non invertendo la matrice (date le dimensioni della stessa), bensì per sostituzioni successive; una volta note le $\{u\}$ si calcolano gli sforzi negli elementi con:

$$\{\sigma\}_j = [D]_j [B]_j \{u\}_j$$



Recupero degli sforzi

A questo punto si possono eseguire tutte le verifiche di resistenza del caso (si controlla che la σ , punto per punto, sia inferiore ad un certo valore critico).

Se non realizzato con la dovuta attenzione, un metodo potrebbe non essere convergente o, peggio ancora, convergere ad una soluzione errata.

La convergenza dipende soprattutto dalla conformazione degli elementi e quindi dalla scelta delle funzioni di forma $[N]$; le $[N]$ devono assicurare la congruenza interna tra gli elementi (tra un elemento e l'altro): una cosa ovvia ma che non sempre si verifica è che assumendo come spostamento quello di un nodo, con $\{s\} = [N]\{u\}$ si riottienga lo spostamento del nodo (cioè N vale 1 in corrispondenza del nodo). Lo spostamento, inoltre, deve essere continuo (per non avere compenetrazioni o lacerazioni); i nodi che giacciono su una faccia devono continuare a giacere su un piano.

Nel caso del tetraedro (o del triangolo nel piano) per ottenere la congruenza è sufficiente che le N siano funzioni lineari del punto.

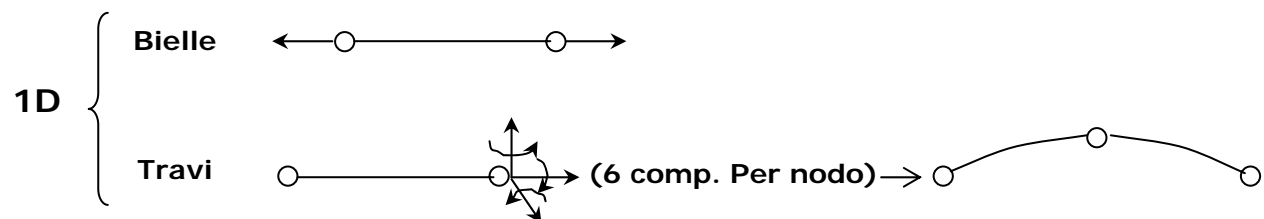
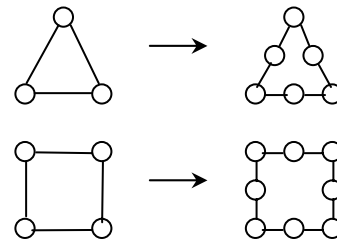
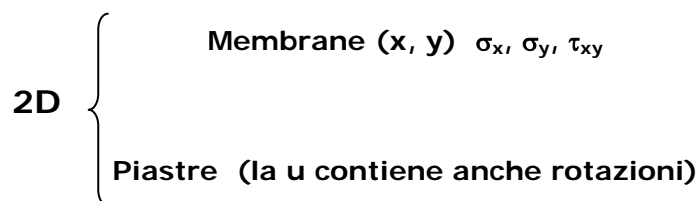
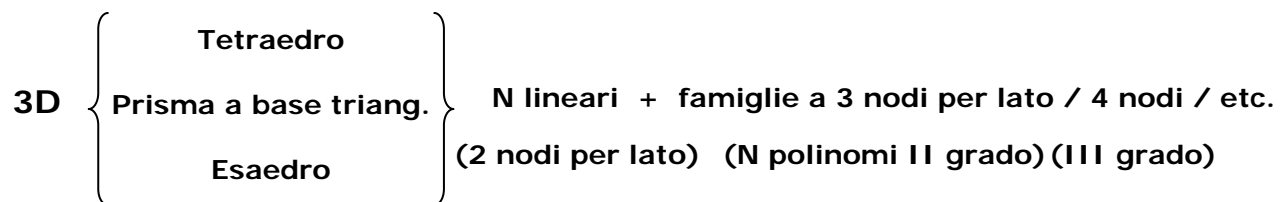
Per avere convergenza, inoltre, le funzioni di forma devono essere in grado di riprodurre gli stati di deformazione uniforme e devono essere in grado di riprodurre esattamente i moti rigidi (stati di deformazione nulla).

Dove ci sono forti gradienti di sforzo (ad esempio in zone di carichi concentrati) bisogna mettere elementi piccoli, mentre dove lo sforzo è pressappoco costante (zone centrali) si possono usare degli elementi grandi (negli elementi a facce piane, con il numero minimo di nodi, lo sforzo rimane costante in ciascun elemento).

Per verificare se la dimensione degli elementi va bene per il problema specifico da risolvere, ci sono dei programmi che danno una misura della convergenza; uno dei parametri di valutazione è la discontinuità di sforzo tra un elemento e l'altro.

Certi programmi per raffinare la convergenza aumentano automaticamente il numero di nodi degli elementi nelle zone critiche, di concentrazione degli sforzi, senza variare il numero di elementi.

Gli elementi a disposizione dell'utente sono:



Per definire la struttura bisogna costruire la tabella dei nodi e degli elementi:

<u>Nodi</u>			<u>Elementi</u>			
Nome	x, y, z	Vincoli	Nome	Tipo	Nodi	Materiale
					Nome 1	Nome
					Nome 2	

Generalmente un numero (non necessariamente in sequenza).

Se si è interessati a problemi statici riguardanti strutture composte da materiali elastici, si può basare il metodo degli elementi finiti, invece che sul PLV, sul principio di minimo dell'energia potenziale totale:

L'energia potenziale di deformazione dell'elemento j-esimo (definita perché il materiale è elastico, cioè conservativo) è:

$$V_{d,j} = \frac{1}{2} \int_{V_j} \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \{u\}_j^T \left(\int_{V_j} [B]^T [D] [B] dV \right) \{u\}_j = \frac{1}{2} \{u\}_j^T [K] \{u\}_j$$

$$V_d = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\}$$

Osserviamo che, in una posizione di equilibrio stabile, [K] sarà definita positiva (si assume come zero energetico la configurazione indeformata); l'energia potenziale del carico (che è sicuramente conservativo essendo statico, cioè costante):

$$V_{e,j} = - \int_{V_j} \{s\}_j^T \{F\}_j dV = - \{u\}_j^T \int_{V_j} [N] \{F\}_j dV$$

$$V_e = - \{u\}^T \{P\}$$

L'energia potenziale totale sarà pertanto:

$$V = V_d + V_e = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T \{P\} = \text{staz.} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial u_i} = 0 \Rightarrow [K] \{u\} - \{P\} = 0$$

che è la stessa forma di equazioni che si era ottenuta col PLV.

In definitiva, le informazioni da fornire al programma di calcolo per risolvere il problema sono:

- Nodi – Elementi – Materiali – Carichi – Tipi di Analisi.

Spesso il programma va a risolvere un sistema del tipo: $[K][u]=[P]$, in modo da risolvere il problema per diverse condizioni di carico (il calcolo viene eseguito una volta sola, con un netto risparmio di tempi di calcolo).

I programmi pre-processor accettano come input la definizione della geometria del pezzo proveniente dal CAD, semplificandola per quanto possibile (certi dettagli sono ininfluenti dal punto di vista strutturale e allungano i tempi di calcolo); si sceglie il tipo di elementi e la dimensione massima degli stessi, quindi il programma effettua automaticamente la numerazione dei nodi e la collocazione degli elementi; tale mesh può essere quindi impostata nel programma di calcolo vero e proprio.

I programmi più diffusi per il calcolo lineare sono il NASTRAN e l'ANSYS; i pre-processor più diffusi sono IDEAS e PATRAN.

Oltre al calcolo statico, questi programmi effettuano anche calcoli di dinamica e di carico critico (instabilità).

Cominciamo col parlare di calcoli dinamici:

se si imposta il problema attraverso il principio di D'Alembert, bisognerà scrivere il lavoro virtuale delle forze esterne più quello delle forze di inerzia:

$$\delta L = \delta L_{e,j} - \int_{V_j} \{\delta s\}_j^T \rho \left\{ \ddot{s} \right\}_j dV = -\{\delta s\}_j^T \left(\int_{V_j} [N]^T \rho [N] dV \right) \left\{ \ddot{u} \right\}_j$$

chiamando $\int_{V_j} [N]^T \rho [N] dV = [M]_j$, o volendo invece procedere attraverso le equazioni di Lagrange, bisogna scrivere l'energia cinetica dell'elemento j-esimo:

$$T_j = \frac{1}{2} \int_{V_j} \left\{ \dot{s} \right\}_j^T \rho \left\{ \dot{s} \right\}_j dV = \frac{1}{2} \left\{ \dot{u} \right\}_j^T \left(\int_{V_j} [N]^T \rho [N] dV \right) \left\{ \dot{u} \right\}_j = \frac{1}{2} \left\{ \dot{u} \right\}_j^T [M]_j \left\{ \dot{u} \right\}_j$$

$[M]_j$ viene definita la matrice di massa dell'elemento j-esimo; per l'intera struttura si avrà:

$$\delta L_e = \{\delta u\}^T \{P\} - \{\delta u\}^T [M] \left\{ \ddot{u} \right\} \quad \text{e} \quad T = \frac{1}{2} \left\{ \dot{u} \right\}^T [M] \left\{ \dot{u} \right\}$$

$$\delta L_d = \{\delta u\}^T [K] \{u\}$$

Uguagliando δL_e e δL_d (ma lo stesso si otterrebbe dalle equazioni di Lagrange), data l'arbitrarietà degli spostamenti, si ottiene:

$$[K]\{u\} = \{P\} - [M]\{\ddot{u}\} \Rightarrow [M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{P\}$$

Tali sono le equazioni delle piccole oscillazioni della struttura.

Considerando $\{u\}_0$ la configurazione di equilibrio statico e $\{P\}_0$ il carico corrispondente, possiamo scrivere le equazioni riferendoci alla perturbazione della posizione di equilibrio statico:

$$\{u\}_0 + \{u\}_1, \{P\}_0 + \{P\}_1; \left\{\ddot{u}\right\}_0 = 0 \Rightarrow [K]\{u\}_0 = \{P\}_0 \Rightarrow [M]\left\{\ddot{u}\right\}_1 + [K]\{u\}_1 = \{P\}_1$$

$$[M]\left\{\ddot{u}\right\}_1 + [K]\{u\}_1 = 0$$

sono le equazioni che governano le piccole oscillazioni di una struttura sottoposta a carico nullo o costante ($\{P\}_1=0$).

Le soluzioni saranno del tipo $\{u\} = \{x\}e^{\lambda t}$; si tratta pertanto di risolvere l'equazione secolare (?):

$$(\lambda^2[M] + [K])\{x\}e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow [\lambda^2 M + K]\{x\} = 0 \Rightarrow \det[\lambda^2 K + M] = 0 \Rightarrow P^{(n)}(\lambda^2) = 0$$

Si troveranno n radici $\lambda_k^2 \in \mathbb{R}$ ([K] e [M] sono definite positive) ma ≤ 0 (per il segno + interposto tra $\lambda^2 M$ e K); questo significa che i λ_k saranno tutti immaginari puri.

$$\{u\} = \{x\}\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow [-\omega^2 M + K]\{x\}\cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$[-\omega^2 M + K]\{x\} = 0 \Rightarrow \det[-\omega^2 M + K] = 0 \Rightarrow \omega^2 = -\lambda^2$$

$$\omega_k \rightarrow \text{pulsazioni proprie} \quad f_k = \frac{\omega_k}{2\pi} \rightarrow \text{frequenze proprie} \quad \{x\}_k \rightarrow \text{modi propri}$$

Le soluzioni, del tipo $C_k\{x\}\cos(\omega t + \varphi)$ (con C_k e φ costanti di integrazione dipendenti dalle condizioni iniziali), descrivono onde stazionarie.

$$[-\omega^2 M + K]\{x\} = 0 \Rightarrow P^{(n)}(\omega^2) = 0 \Rightarrow \underline{\omega_k^2 \in \mathbb{R}, > 0}$$

$$\begin{cases} [-\omega_k^2 M + K]\{x\}_k = 0 \\ [-\omega_r^2 M + K]\{x\}_r = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \{x\}_r^T [-\omega_k^2 M + K]\{x\}_k = 0 \\ \{x\}_k^T [-\omega_r^2 M + K]\{x\}_r = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\{x\}_r^T [M]\{x\}_k \omega_k^2 + \{x\}_r^T [K]\{x\}_k = 0 \\ -\{x\}_k^T [M]\{x\}_r \omega_r^2 + \{x\}_k^T [K]\{x\}_r = 0 \end{cases}$$

sapendo anche che $\{x\}_r^T [K] \{x\}_k = (\{x\}_r^T [K] \{x\}_k)^T = \{x\}_k^T [K] \{x\}_r$ essendo uno scalare e $[K]$ simmetrica, sottraendo membro a membro si ottiene:

$$\{x\}_k^T [M] \{x\}_r (\omega_k^2 - \omega_r^2) = 0$$

i. Se $k \neq r$

$$\begin{cases} \{x\}_k^T [M] \{x\}_r = 0 \\ \{x\}_k^T [K] \{x\}_r = 0 \end{cases}$$

ii. Se $k = r$

$$\begin{cases} \{x\}_k^T [M] \{x\}_k = m_k \\ \{x\}_k^T [K] \{x\}_k = m_k \omega_k^2 \end{cases}$$

L'ultima possibilità rappresenta il caso più interessante:

se $[x] = [x_1; x_2; \dots; x_n] \Rightarrow [x]^T [M] [x] = \text{diag}(m)$; infatti:

$$\begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \dots \\ \dots \\ x_n^T \end{bmatrix} = [M] [x_1; x_2; \dots; x_n] = \begin{bmatrix} x_1^T M x_1 & x_1^T M x_2 & \dots & \dots & x_1^T M x_n \\ x_2^T M x_1 & x_2^T M x_2 & \dots & \dots & x_2^T M x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^T M x_1 & x_n^T M x_2 & \dots & \dots & x_n^T M x_n \end{bmatrix} = \text{diag}(m) \quad \text{(per (i) e (ii))}$$

A questo punto, con il cambiamento di variabili $\{u\} = [x] \{q\}$ (ci si pone nel sistema delle coordinate modali):

$$[\hat{M}] = [x]^T [M] [x] = \text{diag}(m) \quad , \quad [\hat{K}] = [x]^T [K] [x] = \text{diag}(m \omega^2)$$

$$\delta L_e^* = \{\delta u\}^T \{P\} = \{\delta q\}^T [x]^T \{P\} = \{\delta q\}^T \{Q\} \quad \text{dove } \{Q\} = [x]^T \{P\}$$

Dunque le equazioni che descrivono le piccole oscillazioni della struttura sono:

$$\{\delta u\}^T [M] \{\ddot{u}\} + \{\delta u\}^T [K] \{u\} = \{\delta u\}^T \{P\} \Rightarrow \{\delta q\}^T [x]^T [M] [x] \{\ddot{q}\} + \{\delta q\}^T [x]^T [M] [x] \{q\} = \{\delta q\}^T [x]^T \{P\}$$

$$\text{diag}(m) \{\ddot{q}\} + \text{diag}(m \omega^2) \{q\} = \{Q\} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + m_1 \omega_1^2 q_1 = Q_1 \\ m_2 \ddot{q}_2 + m_2 \omega_2^2 q_2 = Q_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{cases}$$

che rappresenta un sistema di n equazioni disaccoppiate, ciascuna delle quali descrive un'oscillazione a 1 g.d.l.

Il sistema, così strutturato, è molto più semplice da risolvere.

Lavorare con le coordinate modali rappresenta il modo migliore per ottenere una buona approssimazione del problema: in tal modo anche un complicato problema aeroelastico sarà retto solo da una ventina di incognite, contro le $100.000 \div 1.000.000$ richieste per una buona approssimazione con gli elementi finiti.

Consideriamo ora le piccole oscillazioni di una struttura forzata da un carico che dipende dalla configurazione:

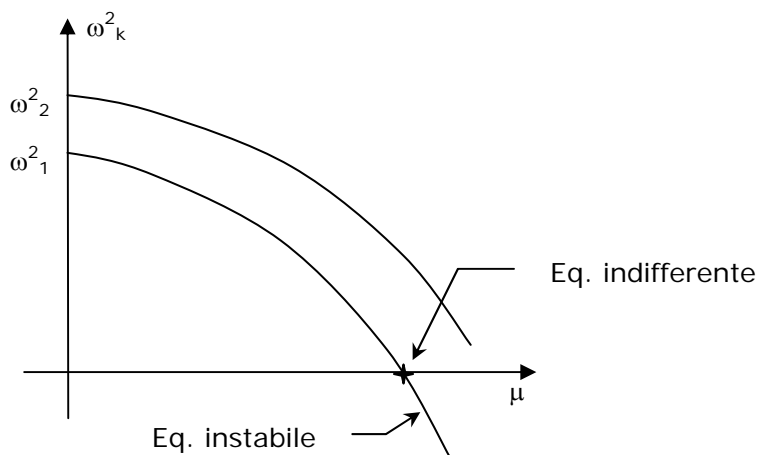
$$\{P\} = \mu[F]\{u\} \Rightarrow [M]\{\ddot{u}\} + [K - \mu F]\{u\} = 0 \Rightarrow \det[-\omega^2 M + K - \mu F] = 0$$

il problema è che $[K - \mu F]$ può non essere definita positiva; infatti, se le forze sono conservative:

$$U(u_i), \quad \frac{\partial U}{\partial u_i} = P_i, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_k} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_k \partial u_i} \Rightarrow \frac{\partial P_i}{\partial u_k} = \frac{\partial P_k}{\partial u_i} \Rightarrow [F] \text{ è simmetrica};$$

↑
Potenziale forza
i-esima
↑
Teorema di Schwarz

Ora, $[K]$ è simmetrica definita positiva, mentre $[K - \mu F]$ è simmetrica definita positiva / negativa a secondo del valore del moltiplicatore μ ; dunque le $\omega_k^2 \in \mathbb{R}$ ma, per certi valori di μ , sono < 0 :



A tali valori minori di 0 di cui ω_k^2 , corrisponderanno soluzioni del tipo:

$$\omega_k = \pm ib \rightarrow e^{+bt}, e^{-bt}, b \in \mathbb{R}$$

La prima tipologia di soluzioni comporta evidentemente un'instabilità statica.

Si osserva che, avvicinandosi al carico critico, le frequenze diminuiscono (tale osservazione costituisce uno strumento pratico fondamentale per stimare i carichi critici delle strutture).

Le forze critiche si valutano in questo modo:

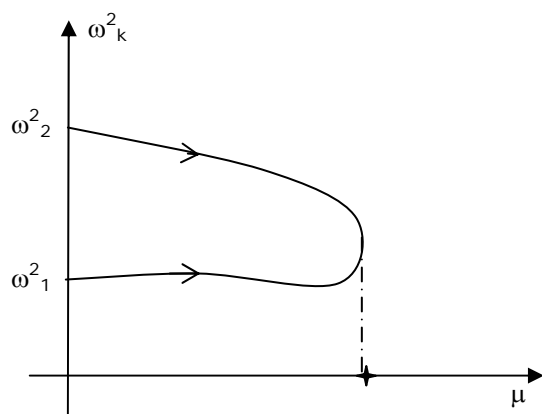
$$\det[K - \mu F] = 0$$

è un altro problema agli autovalori, dove gli autovalori, questa volta, sono i moltiplicatori μ .

Quello che conta è evidentemente il moltiplicatore più basso (oltre si ha instabilità a maggior ragione). Tale tipologia di instabilità si chiama statica perché nel problema $\det[K - \mu F]$ non entra in gioco la massa.

Se invece abbiamo a che fare con forze conservative (come le forze aerodinamiche):

$[K - \mu F]$ non è simmetrica $\rightarrow \omega_k^2 \in \mathbb{C}$, coniugate a due a due



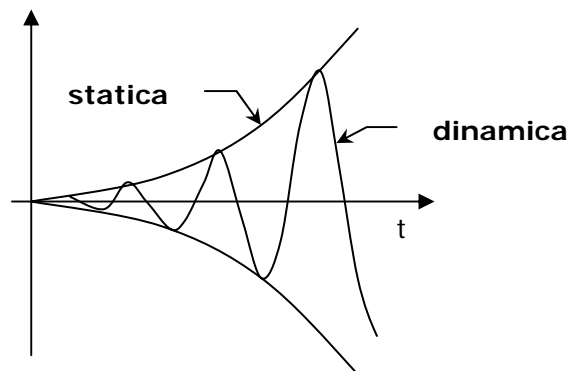
tale circostanza si verifica una volta, dopo un certo μ critico: all'inizio, due pulsazioni distinte tendono a coincidere; dopo, che sono divenute coincidenti, non sono più reali e:

$$\omega_k = a + ib$$

(più la sua coniugata), il che comporta soluzioni del tipo:

$$Ae^{bt} \cos(at + \varphi)$$

instabilità dinamica (oscillazioni rapidamente divergenti).

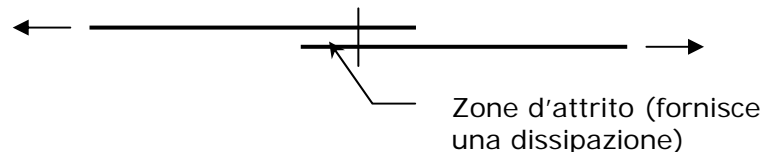


Ad ogni ciclo le forze (che non sono conservative) compiono lavoro positivo sul sistema: si ha un trasferimento energetico a senso unico.

Consideriamo il caso completo:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P\}$$

Il secondo termine è dovuto allo smorzamento strutturale (dovuto in parte all'isteresi del materiale, cioè dal fatto che σ non dipende solo da ε ma anche un poco da $\dot{\varepsilon}$, e in parte alle giunzioni).



Lo smorzamento aerodinamico è però molto più consistente di quello introdotto dalle giunzioni, che a sua volta è più rilevante di quello introdotto dall'isteresi del materiale:

$$\{P\} = \mu \left([A]\{\ddot{u}\} + [H]\{\dot{u}\} + [F]\{u\} \right)$$

È il carico aerodinamico

$$[M - \mu A]\{\ddot{u}\} + [C - \mu H]\{\dot{u}\} + [K - \mu F]\{u\} = 0 \quad \text{dove } \tilde{M}(\mu), \tilde{C}(\mu), \tilde{K}(\mu)$$

l'equazione secolare è del tipo:

$$\det[\lambda^2 \tilde{M} + \lambda \tilde{C} + \tilde{K}] = 0 \Rightarrow P^{(2n)}(\lambda) = 0$$

in generale le radici sono complesse:

$$\lambda_k = a_k \pm ib_k \Rightarrow e^{a_k t} \cos(b_k t + \varphi)$$

Riassumendo si avrà:

1. stabilità: tutte $a_k < 0$, ($b_k \neq 0$)
2. instabilità: almeno un $a_k > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{statica} : b_k = 0 \\ \text{dinamica} : b_k \neq 0 \text{ (flutter)} \end{cases}$

Bisogna quindi cercare la μ critica, ovvero la velocità critica di volo (μ è funzione della velocità).

Torniamo però al problema fondamentale; dallo schema discreto a n gradi di libertà si sono ottenuti n modi propri di vibrare (cioè un numero discreto di frequenze). La struttura reale è però continua (ha un numero infinito di gradi di libertà) e pertanto è caratterizzata da uno spettro continuo di frequenze.

Risulta pertanto lecito domandarsi quanto sia buona una approssimazione del tipo fin qui considerato; di fatto, aumentando il dettaglio dello schema (cioè il numero di gradi di libertà) si vede che le frequenze che si calcolano attraverso gli schemi più grossolani, si ritrovano invariate via via in quelli più raffinati.

Addirittura, per $n \rightarrow \infty$, tali modi di vibrare restano invariati; da questo si deduce che i primi modi di vibrare (quelli a frequenze più basse) sono significativi e separati anche nella struttura reale.

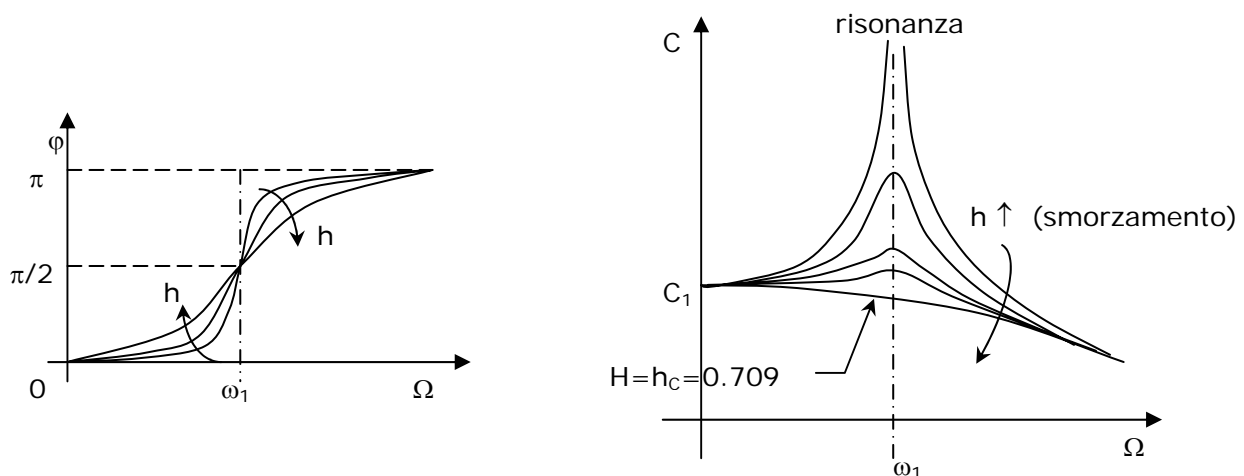
$$\{u\} = [x]\{q\} \quad , \quad \text{diag}(m)\ddot{\{q\}} + \text{diag}(m\omega^2)\{q\} = \{Q\} \quad , \quad \{Q\} = [x]^T \{P\}$$

Supponiamo di applicare alla struttura delle forzanti armoniche (nella realtà si tratta di forze concentrate in punti caratteristici della struttura):

$$\{P\} = \{A\}\cos(\Omega t) \quad \Rightarrow \quad \{Q\} = [x]^T \{A\}\cos(\Omega t) = [y]\cos(\Omega t)$$

Ciò permette di studiare la risposta in frequenza della struttura completa (l'intero aeroplano) e di individuare i modi propri e le frequenze proprie.

Il problema dei vincoli, che non devono evidentemente essere presenti su un aeroplano in volo, viene risolto ponendo dei vincoli (imbracature collegate a molle, cuscini d'aria, ecc.) estremamente cedevoli e quindi caratterizzati da frequenze proprie estremamente basse rispetto a quelle della struttura; lo studio dei modi propri di vibrare avviene modificando lentamente la pulsazione delle forzanti e individuando i picchi di risonanza corrispondenti alle varie frequenze proprie:



$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \frac{y_1}{m_1} \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = \frac{y_2}{m_2} \cos(\Omega t)$$

.....

La risposta a regime:

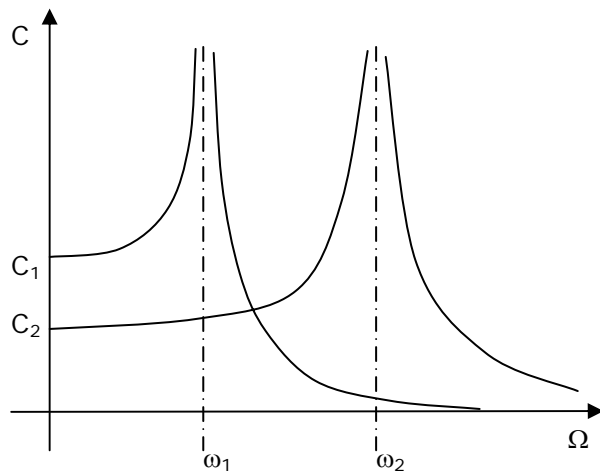
$$q_1 = C_1 \cos(\Omega t + \varphi_1)$$

.....

In teoria, la curva corrispondente allo smorzamento critico ($h_c \approx 0.707$) sarebbe l'ideale per effettuare le misure. In realtà, la struttura è sempre caratterizzata da uno smorzamento molto basso e quindi i picchi sono sempre presenti; per questo motivo, gli strumenti di misura (tipicamente accelerometri piezoelettrici), che hanno frequenze proprie estremamente elevate, trovano tutti questi picchi nel proprio spettro.

Per "tagliare" questi picchi si ricorre normalmente a filtri passa-basso (con il rischio, però, di incorrere nella saturazione dell'amplificatore, a causa dell'indistinzione dei segnali).

Analogamente si procede per le frequenze superiori:



Variando Ω si misurano le varie frequenze proprie:

in corrispondenza di un picco, il modo di vibrare in risonanza prevale di gran lunga sugli altri; il moto avviene praticamente solo secondo tale modo proprio.

Se poi gli accelerometri sono dislocati in maniera opportuna sulla struttura, si può avere anche una visione spaziale del fenomeno (e quindi si può ricavare $[x]$).

Se due frequenze proprie sono molto vicine, bisogna separare i modi: tale risultato viene ottenuto disponendo opportunamente gli eccitatori.

Anche se i vincoli a terra sono cedevoli, la struttura libera, "labile", ha comunque i modi di frequenza zero dovuti ai moti rigidi, che però non hanno alcuna conseguenza sulla misura.

Come si è già osservato,

$$m_1 \ddot{q}_1 + h_1 \dot{q}_1 + k_1 q_1 = A_1 \cos(\Omega t)$$

dove $q_1 = C_1 \cos(\Omega t + \varphi_1)$ è la soluzione particolare di regime.

Nella dinamica degli urti, però, si è interessati soprattutto al transitorio; in teoria questo si otterrebbe andando ad integrare direttamente:

$$[M]\left\{\ddot{u}\right\} + [C]\left\{\dot{u}\right\} + [K]\{u\} = \{P\} \quad (*)$$

Il problema è costituito dal fatto che, nelle normali condizioni di crash, gli spostamenti non sono più infinitesimi e inoltre si va oltre i limiti elastici del materiale; oltre tutto, intervengono anche le forze di contatto (tra le lamiere che si sono piegate). Tutti questi fenomeni determinano la non linearità, per non parlare del fatto che le σ di snervamento risentono delle elevate velocità di deformazione (subiscono aumenti anche del 40%).

Per fortuna, in ogni intervallo di discretizzazione temporale, il fenomeno è ancora in buona approssimazione lineare e come tale retto dall'equazione (*), dove però le matrici non sono più costanti ma devono essere continuamente aggiornate. Per far questo, si usano metodi alle differenze finite (molto usato è il metodo Newmark).